

**SELECCION DE MODELOS CONSTITUTIVOS AVANZADOS: UNA  
VISTA GENERAL**

A. O. Sfriso \*

*Universidad de Buenos Aires y SRK Consulting  
Buenos Aires, Argentina*

*(\* Autor correspondiente: [asfriso@srk.com.ar](mailto:asfriso@srk.com.ar))*

## SELECCION DE MODELOS CONSTITUTIVOS AVANZADOS:

### RESUMEN GENERAL

El modelamiento numérico se está volviendo universal en la práctica de ingeniería de rocas. La mayoría de las aplicaciones se enfocan en la predicción de cargas de falla de problemas 2D, donde los modelos numéricos son extensiones útiles para métodos analíticos y criterios de diseño basados en la experiencia. Para problemas 3D y problemas donde la evaluación de los indicadores de capacidad de servicio – desplazamientos, respuesta de estructura del terreno, etc. – área de importancia, la selección de los modelos constitutivos mismos y las implicancias de la selección de parámetros materiales pueden tener un impacto muy fuerte en la confiabilidad del resultado del modelo y su capacidad predictiva.

Este resumen supervisa los aspectos básicos comunes de las ecuaciones constitutivas empleadas en la ingeniería práctica de rocas y resume algunos desafíos que se observan frecuentemente cuando se revisan los modelos numéricos ejecutados para problemas rutinarios en la ingeniería de rocas.

### PALABRAS CLAVES

**Mecánica continua, modelos constitutivos, parámetros materiales, resistencia, deformación, plasticidad.**

### INTRODUCCIÓN

#### Métodos numéricos

Desde una perspectiva filosófica, los modelos ya sean analíticos o numéricos, son idealizaciones de una realidad percibida. Para nosotros los ingenieros, los modelos son solamente herramientas que usamos para guiar nuestro criterio y entender el problema que tenemos a mano. Cuando se trata con problemas de ingeniería de rocas, recurrimos a un amplio rango de técnicas:

1. Soluciones de forma cerrada como métodos confinamiento-convergencia para túneles circulares: estos métodos satisfacen los requerimientos de equilibrio y compatibilidad al costo de una simplificación cruda del comportamiento del material y la geometría;
2. Los métodos de análisis de límite, como fórmulas de capacidad de soporte: los métodos de límite inferior satisfacen el equilibrio pero sacrifican la compatibilidad y los métodos de límite superior hacen lo opuesto. El comportamiento del material debe ser simple, la geometría admite libertad limitada;
3. Los métodos de equilibrio límite, como el método de rodajas para estabilidad de taludes: satisfacen formas restringidas de equilibrio, no satisfacen requerimientos de compatibilidad, requieren un comportamiento simple del material pero tienen mucha mayor flexibilidad en la geometría;
4. Los métodos numéricos, donde se emplea una malla para discretizar la geometría del problema: cuando se formulan apropiadamente, estos métodos satisfacen los requerimientos de equilibrio y compatibilidad y entregan aproximaciones razonables del comportamiento de geometrías muy complejas y secuencias de construcción. Continúan restricciones muy pequeñas en la geometría y en el comportamiento del material, pero el costo de calibrar los parámetros de material puede ser muy alto.

Todas estas técnicas se pueden usar para computar cargas finales, probabilidad de falla y factores de seguridad. Los métodos 1 y 4, los únicos completamente amigables con la física, también se pueden usar para estimar desplazamientos y otros requerimientos de capacidad de servicio.

En un modelo numérico, el comportamiento del material se idealiza mediante una ecuación constitutiva (conceptualmente, una curva esfuerzo-deformación), la geometría es idealizada mediante una malla y el proceso de construcción/producción es idealizado por una secuencia de cargas y cambios en la geometría de la malla y/o los datos de entrada para las ecuaciones constitutivas.

La pobre definición de cualquiera de estos tres ingredientes produce resultados inutilizables y por eso es que los modelos numéricos son complicados y propensos a errores y solo se deberían usar cuando se aplica al menos

una de estas afirmaciones (Potts et al 2002):

1. Se aborda la geometría completa y condiciones geológicas;
2. Se debería predecir la deformación de estructuras que interactúan;
3. Se debería considerar el efecto del comportamiento del material complejo, incluyendo no-linealidad, plasticidad y fluencia;
4. La solución esta considerablemente influenciada por el estado de esfuerzo in situ;
5. Se debería estimar el efecto de las técnicas de construcción, secuencia de construcción y velocidad de la construcción;
6. El monitoreo es planificado y se requieren los valores de límite de los desplazamientos esperados, presiones de poro y otras cantidades;
7. Se deberían determinar posibles mecanismos de falla y los correspondientes criterios de deformación;
8. Se lleva a cabo un análisis retrospectivo de los resultados de las mediciones y se tienen que identificar las propiedades materiales (modelos constitutivos y parámetros).

Los modelos numéricos ahora se usan de forma rutinaria para resolver problemas en los distintos campos de la ingeniería de rocas, principalmente para evaluar el riesgo de falla de un problema dado. Ponemos mucha atención al esfuerzo, resistencia, probabilidad de falla y “factores de seguridad”; cualquier resultado del modelo que trate con las deformaciones se considera con precaución. Solo las afirmaciones 1, 7 y 8 de la lista mencionada anteriormente son frecuentes; las otras afirmaciones rara vez se aplican.

### **Modelamiento estándar vs avanzado**

Se puede obtener más valor de los modelos numéricos en ingeniería de rocas si mejoramos la consistencia de nuestras estimaciones para el riesgo de falla – el principal uso actual de los modelos numéricos– y la confiabilidad de nuestras estimaciones para deformación, desplazamiento y otros indicadores de capacidad de servicio. Para el primer objetivo, el esfuerzo de la comunidad es enorme y permanente, liderado por la academia pero ahora ampliamente usado en la práctica. Para la capacidad de servicio, los enormes esfuerzos de la academia se traspasan más lentamente hacia la práctica: los pronósticos de capacidad de servicio mayoritariamente se basan en la calibración del comportamiento pasado de la misma operación, se usan predicciones *green-field* con menor confianza.

En este documento, se definen modelos estándar como los modelos numéricos que principalmente intentan obtener un campo de esfuerzo, una estimación de riesgo de falla o un factor de seguridad. Por ejemplo, modelos que abordan problemas de estabilidad y usan herramientas de caracterización de macizo rocoso para estimar los parámetros de resistencia que caen en esta categoría.

Los modelos avanzados pretenden ir más allá de ese punto, ya sea abordando problemas de interacción suelo-estructura– como la deformación de aperturas subterráneas fortificadas – o lidiando con materiales muy disímiles– como el modelamiento de relleno de relaves de labores abandonadas. Para dichos modelos avanzados, el riesgo de equivocarse de mala manera en el resultado depende mucho de la elección de las ecuaciones constitutivas, no solo de la calibración de sus parámetros de material.

### **Modelos continuos vs discontinuos**

Los macizos rocosos son medios discontinuos y por ende los métodos de medios discontinuos– UDEC y 3DEC, por ejemplo– ofrecen un enfoque fundamentalmente sólido al modelamiento de rocas a pesar de los muchos desafíos que aún deben abordar (Bobet et al 2009). Estos modelos son enredados y caros porque su capacidad predictiva depende de la descripción exacta de la geometría, espaciamiento y comportamiento mecánico de las estructuras que tienen el control, las características que se deben incluir en el modelo con el nivel de detalle requerido.

Para los análisis de rutina, las herramientas basadas en la teoría de los medios continuos son por lejos las más usadas. FLAC, Phase<sup>2</sup>, Plaxis, Abaqus son ejemplos de dichas herramientas. Aquí, la naturaleza discontinua de las rocas es borrosa entre “anisotropía” y “macizo rocoso”. El comportamiento discontinuo, el

macizo rocoso y la anisotropía aún son fundamentalmente diferentes. En palabras de “ingeniería”, anisotropía significa comportamiento diferente en diferentes direcciones, macizo rocoso significa comportamiento diferente en diferentes escalas, mientras que comportamiento discontinuo significa bloques que se mueven en sus interfaces.

Cuando se usan herramientas de medios continuos, el escalamiento de propiedades es obligatorio y bien aceptado en la práctica. La contribución de la academia sobre los procedimientos para escalar las propiedades de material ha sido enorme y muy prometedora: podríamos esperar que fórmulas empíricas muy maduras sean complementadas por procedimientos de Macizo Rocosos Sintéticos (SRM) (Ivars et al 2011, Pierce et al 2007) para calcular las propiedades materiales del macizo rocoso usando un enfoque más fundamentalmente correcto (Hoek 2009). Si este es el caso, el uso popular de los modelos numéricos para problemas avanzados puede ser más cercano en tiempo para la industria de la ingeniería de roca y – quizás – nos permitirá predecir deformaciones de macizos rocosos con un nivel de confianza similar a lo que disfrutamos en la ingeniería de suelos hoy en día.

### El foco de este resumen

Este resumen se enfoca en desafíos identificados durante años de revisión de modelos numéricos en la práctica de ingeniería de suelo y roca y las oportunidades que entregan más allá de resolver problemas de resistencia. Solamente se discuten modelos basados en mecanismos continuos, técnicas discontinuas como UDEC, 3DEC o modelos PFC o similares están más allá del alcance de este resumen. Apunta a examinar los fundamentos detrás de las ecuaciones constitutivas disponibles en códigos como FLAC, Abaqus, Plaxis, Phase<sup>2</sup>, etcétera y a destacar donde hay un valor escondido para los practicantes. El alcance se limita a aspectos críticos de los métodos constitutivos mismos y el significado de sus parámetros de entrada. La recolección de datos, procedimientos de calibración, métodos de análisis y la interpretación de cualquier resultado de modelos están más allá del alcance de este documento.

## ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE UN MODELO CONSTITUTIVO E IMPLICANCIAS

### Definición

Un modelo constitutivo – o ecuación constitutiva – es un conjunto de ecuaciones, expresiones y fórmulas, que determina completamente el estado del material para cualquier estado conocido y después de cualquier cambio en su configuración. Restringido a aspectos prácticos de la ingeniería de roca, un modelo constitutivo es un conjunto de ecuaciones que se puede ver como una caja: la entrada es el valor actual del tensor de esfuerzo  $\sigma$  a un paso dado  $n$  (la negrita indica una cantidad tensorial), el valor actual de algunas variables de estado, denotado como  $\rho$  y un incremento de deformación  $\Delta\epsilon$  y la salida es el esfuerzo actualizado y el valor actualizado para las variables de estado. En las fórmulas:

$$\sigma_{n+1} = f(\sigma_n, \rho_n, \Delta\epsilon) \quad (1)$$

$$\rho_{n+1} = g(\sigma_n, \rho_n, \Delta\epsilon) \quad (2)$$

### Parámetros de material y variables de estado

Los parámetros de material son constantes de entrada que no cambian durante los cálculos. El módulo de volumen es un ejemplo típico de un parámetro material en muchos modelos.

Las variables de estado describen el estado actual de un material y cambian durante el cálculo en un rango amplio (físicamente permisible). Debería ser posible medir las variables de estado directamente – al menos teóricamente – en cualquier momento en el tiempo. El esfuerzo y la temperatura son ejemplos de variables de estado. Los parámetros y variables de estado se combinan para formar funciones de variables de estado.

La separación entre los parámetros de material y las variables de estado depende del modelo. Por ejemplo, el módulo de volumen podría ser un parámetro de material en un modelo y una variable de estado en un modelo diferente. En elasticidad lineal, la presión es una variable de estado. Su incremento  $p$  se calcula

usando la expresión simple

$$\dot{p} = K \dot{\epsilon}_v \quad (3)$$

donde  $\dot{\epsilon}_v$  es el incremento volumétrico de deformación y  $K$  es el módulo de volumen (un parámetro de material). En un modelo más avanzado podemos tener un módulo de volumen  $K(p)$  que es dependiente de la presión y por ende

$$\dot{p} = K(p) \dot{\epsilon}_v \quad (4)$$

Una expresión común usada en ingeniería de suelos es

$$K(p) = K_{ref} \left( \frac{p}{p_{ref}} \right)^m \quad (5)$$

En este caso  $K(p)$  es una función de la variable de estado  $p$  y los parámetros de material del modelo son  $K_{ref}$ ,  $m$  and  $p_{ref}$ .

Para reproducir el comportamiento de un material elástico no material, uno puede usar un modelo como el descrito por las ecuaciones (4) y (5). No se debería usar la ecuación (3) y cambiar  $K$  manualmente, debido a que el módulo de volumen es un resultado del modelo y no un valor de entrada. La distinción no es solo de “valor académico”. En el ejemplo elemental de las ecuaciones (4) y (5), la solución exacta para  $p$  es

$$p = \left( \frac{K_{ref}}{p_{ref}} \cdot \epsilon_v \right)^{\frac{1}{1-m}} p_{ref} \quad (6)$$

La Tabla 1 compara los resultados obtenidos al actualizar  $K$  manualmente en cinco pasos y la solución exacta dada por la ecuación (6) para una presión inicial  $p_0 = 100kPa$  y varios valores de  $m$ .  $K_{ref} = 100MPa$  y  $p_{ref} = 100kPa$  se adoptaron en este ejemplo. El error compuesto en el rango 43% - 98% se explica a sí mismo y es la prueba que apoya la *Recomendación 1*:

***Recomendación 1:** Elegir el modelo constitutivo más simple que reproducirá el comportamiento del material de su problema particular, siempre que usted no cambie sus parámetros materiales durante la ejecución del modelo.*

Tabla 1. Predicción “a mano” de la presión final después de cinco incrementos iguales de deformación, valor exacto y % error.

|            | $\Delta\epsilon_v = 2\%$ | $\Delta\epsilon_v = 4\%$ | $\Delta\epsilon_v = 6\%$ | $\Delta\epsilon_v = 8\%$ | $\Delta\epsilon_v = 10\%$ | Eqn. (6) | Error |
|------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|----------|-------|
| $m = 0.30$ | 300                      | 578                      | 916                      | 1,305                    | 1,738                     | 3,074    | 43%   |
| $m = 0.50$ | 300                      | 646                      | 1,155                    | 1,835                    | 2,691                     | 12,100   | 78%   |
| $m = 0.70$ | 300                      | 732                      | 1,537                    | 2,891                    | 4,999                     | 296,012  | 98%   |

Por ejemplo, los materiales de relleno no se deberían modelar usando el modelo estándar Mohr-Coulomb porque este modelo usa un módulo de volumen constante y cambiarlo a mano violaría la recomendación. El modelamiento del comportamiento de moderación de deformación simplemente ajustando la cohesión a mano sería un segundo ejemplo de uso inapropiado de modelos numéricos. Desde esta perspectiva, el modelamiento avanzado significaría tomar ventaja completamente de lo que los métodos numéricos pueden dar, aún considerando la física como no negociable.

## Cinemática

Para la amplia mayoría de las aplicaciones, los modelos constitutivos en ingeniería de roca se basan en elastoplasticidad local, de deformación infinitesimal, dependiente del tiempo. La descomposición aditiva estándar del tensor de deformación  $\epsilon$  infinitesimal en el tensor de deformación elástica  $\epsilon^e$  y el tensor de deformación plástica  $\epsilon^p$  se adoptan en la mayoría de los códigos. Es

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (7)$$

En el caso unidimensional, la deformación axial se reduce a

$$\epsilon_a = \frac{\Delta h}{h_0} \quad (8)$$

Esta definición no es para nada trivial. El esfuerzo axial calculado en los ensayos de compresión triaxial estándar toma en cuenta el cambio en el volumen y la sección transversal de la muestra

$$\sigma_d = \frac{P}{A} \quad (9)$$

donde

$$A = \frac{1+\epsilon_v}{1-\epsilon_a} A_0 \quad (10)$$

y  $A_0$  es la sección transversal inicial de la muestra. Las ecuaciones (7) y (10) no son compatibles, porque una usa una definición de deformación infinitesimal y la otra es una forma de deformación finita. El significado final de esto es que la curva de esfuerzo-deformación que sale del modelo puede ser – y usualmente es– diferente al valor esperado en base a los datos de entrada, ver Figura 1.

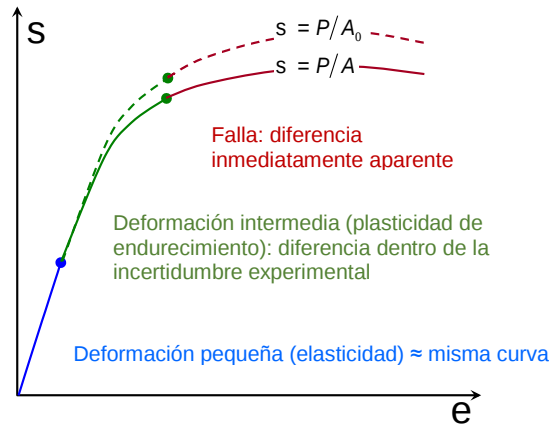


Figura 1. Implicancia de la definición de deformación. Línea continua: resultado experimental usado para calibrar parámetros. Línea punteada: resultado de modelo real.

Este problema se ha eludido adoptando la *Recomendación 2*:

**Recomendación 2:** Siempre hacer una simulación numérica de los ensayos in situ y de laboratorio que usted usa para calibrar su modelo y confirmar que el modelo reproduce correctamente el comportamiento del material en el ensayo. Ajustar parámetros si se requiere.

## Ecuación esfuerzo-deformación

Una ecuación esfuerzo-deformación relaciona el aumento de esfuerzo con el de la deformación elástica

$$\dot{\sigma} = \mathbf{D} : \dot{\epsilon}^e \quad (11)$$

donde  $\mathbf{D}^e$  es un operador elástico que puede ser constante— en el caso de la elasticidad lineal — o dependiente de cualquier variable de estado incluido el esfuerzo. La elasticidad lineal— ya sea isotrópica o anisotrópica — es comúnmente asumida en la ingeniería de rocas. Las fórmulas empíricas que relacionan los valores de rigidez como el módulo de Young con algún indicador de la calidad de roca como GSI no agregan no-linealidad, porque el GSI no cambia durante el proceso de cálculo y por ende es solo un parámetro de material, no una variable de estado.

Muchos modelos en suelos en ingeniería de suelos incluyen rigidez que es dependiente de la presión. Estos modelos están disponibles también en los códigos numéricos empleados en ingeniería de rocas y deberían ser la elección por defecto cuando nos interesa la rigidez dependiente del esfuerzo. Para un ejemplo interesante de un modelo continuo y discontinuo para la mina Ok Tedi vea Mylvaganam et al (2011). En esa contribución, el restablecimiento no lineal del macizo rocoso al excavarse un recorte fue modelado usando un modelo elastoplástico Phase<sup>2</sup> con elasticidad constante y un modelo UDEC. El modelo UDEC tuvo éxito en la predicción — al menos de forma cualitativa — el desplazamiento de restablecimiento de la cara del rajo porque pudo reproducir el efecto de la descompresión de la diaclasa y el deslizamiento por dilatación. El modelo Phase<sup>2</sup> entregó desplazamientos mucho más bajos que aquellos registrados en terreno. El restablecimiento— pero no todas las otras características del modelo UDEC — se podría haber capturado de manera más realista si se hubiera usado un módulo de volumen dependiente de la presión— como el de la ecuación (5) — en el modelo Phase<sup>2</sup>. Esta afirmación apoya la Recomendación 3:

*Recomendación 3: Cuando sea significativo para su problema, aborde la no-linealidad de la respuesta elástica usando una formulación elástica apropiada. No espere hacer coincidir todos los desplazamientos simplemente jugando con el módulo de Young del modelo Mohr- Coulomb. Prefiera modelos hiperelásticos cuando estén disponibles.*

## Función de fluencia y resistencia

Una función de fluencia es una función de variables de esfuerzo y estado que indican fluencia, es decir, la aparición de deformación plástica. Las funciones de fluencia generalmente tiene la forma

$$F(\sigma, \rho) = 0 \quad (12)$$

y definen una denominada superficie de fluencia en espacio de esfuerzo. La condición de intercambio indica que si  $F < 0$  solo se desarrolla deformación elástica y que solo ocurre deformación plástica cuando  $F = 0$  and  $\dot{F} = 0$ , es decir cuando el estado de esfuerzo alcanza las superficies de fluencia y permanece allí.

Muchas funciones de fluencia están disponibles en la literatura y en códigos de investigación. En aplicaciones prácticas de ingeniería de rocas, sin embargo, solamente las funciones de fluencia Mohr-Coulomb y Hoek-Brown se emplean de forma rutinaria. En el espacio de esfuerzo principal el criterio Mohr-Coulomb se lee como

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - (\sigma_1 + \sigma_3) \sin(\phi) + 2c \cos(\phi) = 0 \quad (13)$$

Donde  $c$  y  $\phi$  son parámetros de material y  $\sigma_1$  y  $\sigma_3$  son los esfuerzos principales mayor y menor, respectivamente. El criterio Hoek-Brown (Hoek et al 2002) se lee como

$$F = \sigma_1 - \sigma_3 - \sigma_c \left( m \frac{\sigma_3}{\sigma_c} + s \right)^a = 0 \quad (14)$$

donde los parámetros de material son  $m$ ,  $s$ , y  $a$ . Para una discusión sobre el criterio Hoek-Brown, vea Eberhardt (2012). Los parámetros Mohr-Coulomb dependientes de esfuerzo se han derivado para que coincidan con el criterio Hoek-Brown. Por ejemplo, la conversión para el ángulo medio de fricción se lee como (Hoek et al 2002)

$$\sin(\phi) = \frac{6 a (s+m \sigma_3)^{a-1}}{2 (1+a)(2+a)+6 a m (s+m \sigma_3)^{a-1}} \quad (15)$$

El criterio Hoek-Brown reproduce efectivamente la curvatura de la superficie de falla observada en muchas rocas. El mismo resultado, sin embargo, se puede obtener usando la ecuación (13) con un ángulo de fricción dependiente del esfuerzo. Una de las fórmulas más frecuentemente usadas para relleno de roca es (Leps 1970)

$$\phi(p) = \phi_0 - \Delta\phi \cdot \log\left(\frac{\sigma_3}{p_{atm}}\right) \quad (16)$$

donde  $\phi_0$  y  $\Delta\phi$  son parámetros y  $p_{atm}$  la presión atmosférica. Note que la ecuación (15) y ecuación (16) son fundamentalmente diferentes. La ecuación (15) entrega un valor promedio para un ángulo de fricción constante a utilizar en un amplio rango de esfuerzo y solo es útil para propósitos de conversión. Por otra parte, la ecuación (16) entrega efectivamente una superficie de fluencia curvada, siendo  $\phi(p)$  la función de variables de estado que controlan esta característica y se pueden usar directamente en un modelo numérico apropiado.

El modelo Mohr-Coulomb (ecuación (13)) y el modelo Hoek-Brown (ecuación (14)) ignoran el efecto del esfuerzo principal intermedio  $\sigma_2$ , que juega un rol para rocas (ver discusión en Mogi 2006). Dos funciones de fluencia muy bien conocidas que toman  $\sigma_2$  en cuenta son el criterio Lade-Duncan (Lade and Duncan 1973) y el criterio Matsuoka-Nakai (1974) que respectivamente se leen

$$F_{MN} = q + \sqrt{\frac{3\mu}{6+\mu} - \frac{2}{9} \frac{9+\mu}{6+\mu} \left(\frac{q}{p}\right)^3} \sin(3\theta) \cdot p \quad (17)$$

$$F_{LD} = q + \sqrt{\frac{3L}{27+L} - \frac{2}{9} \left(\frac{q}{p}\right)^3} \sin(3\theta) \cdot p \quad (18)$$

Donde  $\sqrt{3J_2}$ ,  $J_2$  es la segunda variable desviatoria del tensor de esfuerzo,  $\theta$  es el ángulo Lode, mientras que  $\mu$  y  $L$  son parámetros materiales, calibrados usando ensayos de compresión triaxial convencionales. Lade (1997) demostró la aplicabilidad del criterio Lade-Duncan a las rocas y logró reproducir la curvatura de la superficie de fluencia – la principal razón para usar el modelo Hoek-Brown – reemplazando el parámetro de material  $L$  por una función de presión  $L(p)$ . Estudios experimentales y teóricos que incorporan  $\sigma_2$  son comunes en la literatura y son un área activa de investigación, ver por ejemplo (Descamps et al 2012, Lee et al 2012, Lee and Bobet 2013, Liu et al 2012, Meyer and Labuz 2013, Sriapai et al 2013, Yu et al 2002, Zhang et al 2013). Para una comparación interesante entre algunos de ellos ver por ejemplo (Benz and Schwab 2009). La Figura 2 muestra los criterios de Mohr-Coulomb, Lade-Duncan y Matsuoka-Nakai en el plano de esfuerzo desviatorio.

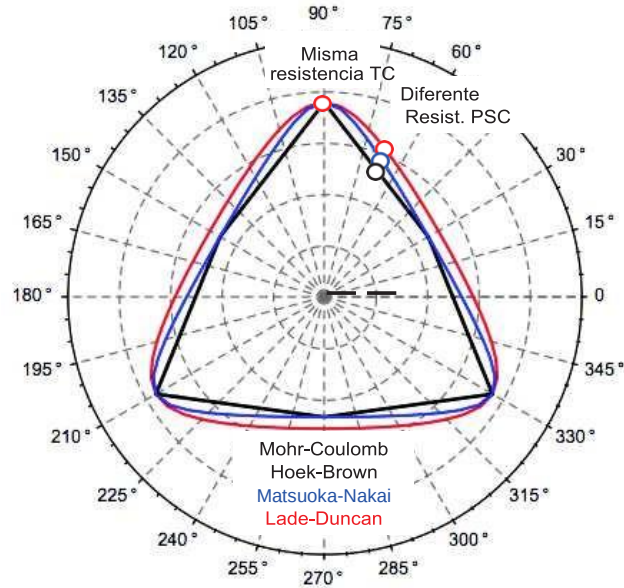


Figura 2. Criterios Mohr-Coulomb, Lade-Duncan y Matsuoka-Nakai en el plano de esfuerzo desviatorio.

Se muestra en la Figura 2 que si las cuatro funciones de fluencia se calibran para que coincidan en su resistencia en compresión triaxial (TC), los criterios más realistas Lade-Duncan y Matsuoka-Nakai predicen resistencias más altas en la compresión de deformación de plano (PSC), una característica que ha probado ser válida para arcillas, arenas y rocas intactas y que se asume para macizos rocosos. Los parámetros basados en correlaciones que se citan junto con resultados experimentales en muchas publicaciones (ver Zhang 2009 para una revisión interesante) muestran que el tema no llama bastante la atención de parte de la práctica.

En palabras de ingeniería, la oración anterior significa que la pared de un túnel está en una condición más segura que un pilar cuadrado porque una roca dada resiste más en deformación de plano que en estado de esfuerzo triaxial. A pesar de ser abordada por los métodos sugeridos de ISRM (Chang y Haimson 2012, Fontoura 2012, Haimson y Bobet 2012), esta característica particular del comportamiento de los geomateriales se pasa por alto en las aplicaciones prácticas en ingeniería de rocas y probablemente de una manera insegura. La mayoría de las estimaciones de resistencia del macizo rocoso se basan en análisis retrospectivo del comportamiento observado, donde las condiciones de deformación en plano superan a las condiciones triaxiales en gran cantidad—taludes, túneles y caserones contra pilares y similares—y por ende debemos asumir que las correlaciones usadas en la práctica podrían aplicarse mejor a parámetros de resistencia de deformación de plano.

Si la afirmación anterior es verdadera, los modelos numéricos 3D que usan los criterios Mohr-Coulomb o Hoek-Brown, calibrados usando correlaciones GSI, pueden sobre estimar la resistencia en partes del modelo donde prevalecen condiciones triaxiales, por ejemplo, en esquinas, pilares aislados o cruces. La Tabla 2 muestra la proporción entre la resistencia de compresión y la esquina triaxial dividida por la máxima resistencia de compresión pronosticada por los criterios Mohr-Coulomb, Hoek-Brown, Matsuoka-Nakai y Lade-Duncan.

Tabla 2. Resistencia de compresión triaxial como un porcentaje de la máxima resistencia a compresión pronosticada por varios criterios de fluencia.

|                   | Mohr-Coulomb<br>Hoek-Brown | Matsuoka-<br>Nakai | Lade-<br>Duncan |
|-------------------|----------------------------|--------------------|-----------------|
| $\phi = 35^\circ$ | 100%                       | 82%                | 71%             |
| $\phi = 45^\circ$ | 100%                       | 76%                | 58%             |
| $\phi = 55^\circ$ | 100%                       | 71%                | 42%             |

Esta tabla apoya la *Recomendación 4*:

***Recomendación 4:** Cuando se usan correlaciones para estimar los parámetros de resistencia, esté al tanto de los antecedentes que sirven de soporte a dichas correlaciones y los modelos constitutivos con los que se pretende usarlas. Las correlaciones que se pretenden usar en modelos constitutivos 2D – notablemente, correlaciones basadas en GSI para el modelo Hoek-Brown – se deberían revisar cuidadosamente cuando se usen en modelos 3D.*

Cuando se recurre a tecnología SRM para calibrar macizos rocosos que exhiben comportamiento isotrópico, se pueden ocupar realizaciones de condiciones de esfuerzo triaxial y de plano y otras rutas de esfuerzo para calibrar 3D funciones de fluencia (Ej. Estrada and Taboada 2013, Zhao and Evans 2009). Los modelos de diaclasas ubicuas (Ej. Clark 2006, Wan and Huang 2009), disponibles en software comerciales– Ej. Plaxis, Phase<sup>2</sup>, FLAC – son la manera más práctica de lidiar con la anisotropía de resistencia de roca dentro del marco de trabajo de mecánica continua.

Sainsbury et al (2008a) presenta un procedimiento para la calibración de un modelo de diaclasas ubicuas calibrado usando SRM y empleado en un problema muy complejo (Sainsbury et al 2008b).

### Regla de flujo

La regla de flujo indica la dirección de deformación plástica. La mayoría de los modelos empleados en la práctica adoptan asociatividad desviatoria y no-asociatividad volumétrica, lo cual, en palabras de ingeniería, significa que algunos parámetros se entregan al usuario para controlar la dilatación plástica.

Se ha establecido desde hace mucho tiempo en mecánica de suelos que la dilatación– deformación volumétrica que ocurre en el cizalle– no es una propiedad material sino un comportamiento observado que depende muchísimo del esfuerzo y la densidad, ver Sfriso y Weber (2010) para una discusión sobre el tema. Para suelos, el máximo ángulo de fricción se puede dividir en dos componentes

$$\phi(p) = \phi_c + \psi(p) \quad (19)$$

donde  $\phi_c$  es el ángulo de fricción cuando no se observa dilatación y  $\psi$  es un término de dilatación que depende de la densidad y presión. En ingeniería de rocas también se observa sensibilidad a la presión, mientras que la dependencia de la densidad se reemplaza por fracturamiento post-falla y fragmentación (ver Alejano y Alonso 2005 para una revisión). Esto fue reconocido por la expresión de Barton para la resistencia a cizalle en diaclasas (ver la reciente referencia y discusión del modelo Barton-Bandis en Barton 2013)

$$\phi(\sigma_n) = \phi_r + JRC \cdot \log\left(\frac{JCS}{\sigma_n}\right) \quad (20)$$

donde  $\phi_r$ ,  $JRC$  y  $JCS$  son parámetros de material. Note la similitud entre la ecuación (16) y la ecuación (20), estas comparten la forma matemática de la ecuación (19).

Hay varias definiciones para el término dilatancia disponibles. La más simple es un ángulo de dilatancia constante  $\psi$  que define la deformación plástica volumétrica  $\epsilon_v^p$  como una función de la distorsión plástica  $\dot{\gamma}^p$

$$\epsilon_v^p = \sin(\psi) \cdot \dot{\gamma}^p \quad (21)$$

Vermeer and De Borst (1984) introdujeron un ángulo de dilatancia dependiente de la movilización de resistencia

$$\sin(\psi) = \frac{\sin(\phi_{mob}) - \sin(\phi_c)}{1 - \sin(\phi_{mob}) \sin(\phi_c)} \quad (22)$$

donde  $\phi_{mob}$  es el ángulo de fricción movilizado. Zhao and Caic (2010) discutieron las implicancias de utilizar un ángulo de dilatación constante asociado y concluyeron que no puede simular razonablemente la distribución de desplazamiento alrededor de los túneles y mostraron que las mejores predicciones obtuvieron un modelo de ángulo de dilatación movilizado que depende de esfuerzo de confinamiento y la deformación plástica de cizalle que se use.

Pocos modelos de dilatancia abordan por completo rutas de esfuerzo en 3D reales. Guo and Stolle (2004) y Sfriso and Weber (2010) introdujeron implementaciones numéricas de la ecuación de Rowe. Tsegaye and Benz (2014) también introdujeron una fórmula general de esfuerzo-dilatación y la aplicaron al criterio Hoek–Brown. Sfriso et al (2011) discutieron más en profundidad las implicancias numéricas del uso de una fórmula de dilatación 3D.

La combinación de los modelos básicos de Diaclasa Ubicua– roca elástica y diaclasas elastoplásticas– y dilatancia pueden entregar resultados no realistas, porque la dilatación plástica puede bloquear los pocos mecanismos cinemáticos de las UJM, lo que lleva a esfuerzos de fluencia muy alta. Adhikary (2010) presentó una revisión del comportamiento de la UJM estándar en FLAC2D y abordó algunos de los desafíos. La dilatación también afecta significativamente el cálculo definitivo de carga en muchos otros problemas de valor límite estándar en plasticidad (Ej. Manzari and Nour 2000, Zhao and Caig 2010). La recomendación 5 es:

*Recomendación 5: Cuando se especifican los parámetros que impone el comportamiento de dilatación a los modelos 3D, revisar la respuesta del modelo para varias rutas de esfuerzo usando ensayos numéricos simples. Evitar usar roca elástica más diaclasas ubicuas dilatantes en todas las configuraciones menos las triviales. Siempre correr una versión del modelo sin dilatación y revisar que las diferencias sean razonables. Si no es así, revisar cuidadosamente si su combinación de función de fluencia y regla de flujo permite el desarrollo de deformaciones plásticas realistas.*

### Ecuaciones de evolución, endurecimiento y ablandamiento

Las ecuaciones de evolución son expresiones que dan cuenta de la evolución de variables de estado. En términos generales, las ecuaciones de evolución son del tipo

$$\dot{\rho} = f(\epsilon^p) \quad (23)$$

donde  $\dot{\rho}$  significa el incremento de una variable de estado genérica. Las ecuaciones de evolución se requieren si se va a reproducir una curva de esfuerzo-deformación experimental no lineal en el régimen de endurecimiento previo al máximo y también para el ablandamiento en el régimen post máximo. En este último caso, las ecuaciones de evolución de ablandamiento de deformación se deben usar junto con las técnicas de regularización para garantizar la independencia de la malla.

Los modelos de ablandamiento de cohesión y endurecimiento de fricción se están volviendo más populares para evaluar el comportamiento frágil (Ej. Barton 2013, Zea and Celestino 2011). Si bien es muy significativo desde la perspectiva teórica y práctica, cualquier forma de ablandamiento impone desafíos extremos para la mecánica continua basada en modelos numéricos. La Figura 3 (Sfriso 2010) muestra el gráfico de desplazamiento para una simulación de compresión de deformación de plano de un modelo constitutivo de deformación-ablandamiento post máximo. Este tipo de gráficos de desplazamiento son agradables, aunque dependen de la malla– es decir no se pueden usar – para la mayoría de los códigos comerciales disponibles. La Figura 4 (Sfriso 2010) ilustra la alta no linealidad de las curvas de esfuerzo-deformación para varios puntos en una simulación de compresión triaxial de dicho modelo y el resultado promedio (aparentemente agradable, pero inútil).

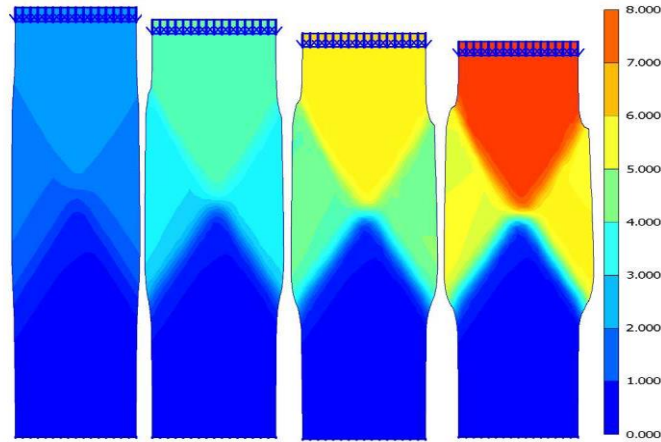


Figura 3. Simulación de un ensayo de compresión de plano de un material de ablandamiento que exhibe deformación- localización (Sfriso 2010).

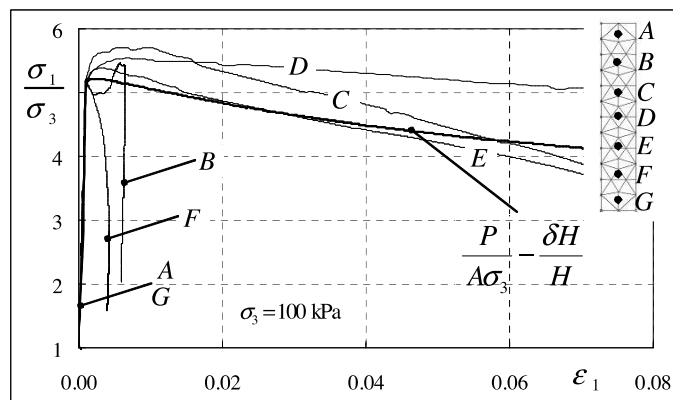


Figura 4. Simulación de un ensayo de compresión triaxial en un material de deformación- ablandamiento que muestra un campo de desplazamiento altamente no uniforme (Sfriso 2010).

3DEC, PFC3D y otros paquetes de software basados en mecánica discontinua están disponibles para modelar el comportamiento de deformación-ablandamiento, FLAC, Plaxis y Phase<sup>2</sup> no son herramientas adecuadas para este propósito. Si las implicancias del daño y el ablandamiento se deben tomar en cuenta en estos códigos como conservadores, aunque aceptables a alternativa es correr el modelo usando dos conjuntos de parámetros, uno para la resistencia máxima y el segundo para la resistencia residual o resistencia dañada.

La dependencia de la malla es simplemente una falla fatal y un problema más probable cuando se usan modelos constitutivos de deformación-ablandamiento. Esta afirmación activa la Recomendación 6.

*Recomendación 6: La dependencia de la malla es una falla fatal para los modelos numéricos. UA menos que haya absoluta certeza en las implicancias, evite modelar el ablandamiento de la deformación debido a que puede llevar a una ubicación descontrolada de naturaleza puramente numérica. Cuando se aplica la Recomendación 2 (reproducción de ensayos usando modelos) a modelos de ablandamiento de deformación use al menos dos mallas de tamaños de elemento ampliamente diferentes y continúe con el modelamiento solamente si usted obtiene parámetros similares usando las dos mallas. Corra el modelo completo usando dos mallas, notoriamente diferentes en la ubicación de las zonas de ablandamiento de deformación.*

## Necesidad de datos experimentales adecuados

Los parámetros de material son aquellas constantes que definen el comportamiento del material. Como tales, requieren un procedimiento sistemático para determinación que incluye ensayos de terreno y laboratorio y una profunda comprensión de los objetivos del modelo y las limitaciones de las herramientas disponibles. El tema se ha discutido ampliamente en la literatura (para un enfoque comprehensivo vea Feng and Hudson 2004, 2010, Hudson and Feng 2007, 2010). Un equilibrio apropiado entre el esfuerzo de producir un modelo numérico avanzado y el valor obtenido de él debería excluir el uso de modelos numéricos basados solamente en estimaciones de parámetro. Esta información apoya la Recomendación 7:

***Recomendación 7:** Realizar modelos 3D y modelos que tienen como propósito estimar los desplazamientos y otros indicadores de capacidad de servicio solamente cuando usted tenga resultados adecuados in situ o de ensayos de laboratorio. No construya un modelo “avanzado” basado en las estimaciones de parámetros.*

Desde la perspectiva de modelamiento, es obligatorio distinguir rápidamente lo que irá a los parámetros de macizo rocoso – es decir, dentro del continuo equivalente extendido – y lo que se considerará “estructura” – es decir, incluido en la malla de elementos finitos como una característica particular. Esta distinción tiene poco que ver con la de la “roca intacta” y “diaclasas” e incluso con el enfoque de caracterización de macizo rocoso. Para modelos grandes, todas excepto las diaclasas más relevantes serán extendidas en las propiedades de macizo rocoso. En sub-modelos de dicho modelo grande, algunas de las características se pueden incluir explícitamente en la malla y por ende retirarse del macizo rocoso, un proceso que cambiará los parámetros materiales de este último. Es deseable que se obtengan resultados similar del modelo grande y del sub-modelo detallado.

## El enfoque de caracterización del macizo rocoso para calibrar los parámetros materiales

Las técnicas de caracterización de macizo rocoso no pretendían alimentar parámetros a los modelos numéricos. Citando a AFTES (2003): *La meta más importante en la caracterización de los macizos rocosos es proporcionar al ingeniero datos cuantitativos y cualitativos para describir su estructura y evaluar sus propiedades mecánicas e hidráulicas a una escala proporcional con el volumen de la roca afectada por las estructuras.* AFTES (2003) también tiene una afirmación clara: *Se deben usar correlaciones con mucha precaución, especialmente para los parámetros de resistencia: evite correlaciones 'en cascada' del tipo  $Q \Rightarrow RMR \Rightarrow (m, s) \Rightarrow (c, \phi)$ .*

El desarrollo de herramientas de caracterización de macizo rocoso para determinar los parámetros de material ha llegado a su fin. Citando a Evert Hoek (2009): *Hoek y Marinos han descrito los esfuerzos que se han hecho, en un periodo de más de 30 años, para refinar el criterio Hoek-Brown y el sistema de clasificación GSI para cubrir un amplio rango de macizos rocosos y para mejorar su exactitud ... En retrospectiva y teniendo en cuenta que los macizos rocosos considerados están limitados por los supuestos de homogeneidad e isotropía, es aparente que estos esfuerzos han alcanzado el punto de retornos que se desvanecen... ahora es momento de ver si los desarrollos de tecnología computacional y métodos numéricos nos pueden ayudar a calibrar o pasar de los métodos empíricos, tales como el criterio Hoek-Brown, que se ha usado por tanto tiempo.*

La enorme cantidad de experiencia oculta detrás de las herramientas de caracterización de macizo rocoso sin embargo, no se puede pasar por alto. Los estimadores de parámetros, basado en caracterización del macizo rocoso entregan límites razonables que ayudan a identificar cuando un resultado de ensayo es poco confiable o incorrecto (ej. Gibson 2005).

La caracterización de macizo rocoso ciertamente ayuda a determinar las unidades geotécnicas relevantes y sub-unidades. En combinación con el modelamiento preliminar, qué ensayos se requieren, ya sea de laboratorio o in situ. Desde una perspectiva de modelamiento, la caracterización de macizo rocoso no se puede completar antes de decidir cuales características del macizo serán modeladas explícitamente y cuales serán vaciadas en la caja del macizo rocoso.

## Reporte

Potts et al (2002) es una excelente guía para planificación, construcción, uso y reporte de modelos numéricos avanzados en geotecnia. Se recomienda al lector que lo use como una lista de verificación de procedimientos sólidos. Cuando se reporten los resultados de un modelo numérico, es una buena práctica incluir: i) el propósito, objetivo y alcance del modelo numérico; ii) una descripción breve de los modelos constitutivos empleados; iii) la lista de parámetros de entrada, el procedimiento usado para determinar y la comparación entre los datos experimentales y el modelo del ensayo; iv) cualquier cálculo manual o pronóstico del resultado empleado para revisar la validez de los resultados; v) resultados de análisis de sensibilidad (y prueba de la independencia de la malla, especialmente cuando se trata de materiales con deformación-ablandamiento).

## CONCLUSIONES

El modelamiento numérico se está volviendo universal en la práctica de ingeniería de rocas y es la única herramienta disponible que aborda las geometrías complejas y el comportamiento no lineal de los macizos rocosos y aún así respecta la física. Los modelos constitutivos avanzados se pueden usar para estimar los indicadores de capacidad de servicio, interacción terreno-estructura y problemas 3D. la academia tiene un gran inventario de modelos basados en mecánica continua que se pueden usar con confianza en aplicaciones prácticas.

La estructura matemática e ingredientes para dichos modelos constitutivos se revisaron brevemente. Para cada ingrediente, las implicancias de seleccionar modelos para aplicaciones prácticas se discutieron y se dieron algunas recomendaciones. Estas recomendaciones son:

1. Elegir el modelo constitutivo más simple siempre que usted no cambie los parámetros;
2. Siempre haga una simulación numérica de ensayos que usa para calibrar su modelo;
3. Abordar la no linealidad elástica usando una fórmula no lineal apropiada. Absténgase de cambiar los parámetros elásticos manualmente;
4. Esté al tanto de los datos que soportan las correlaciones para parámetros de resistencia y los modelos constitutivos con los que se pretende usarlos. Evitar usar correlaciones en cascada;
5. Cuando especifique la dilatación revise la respuesta del modelo para varias rutas de esfuerzo usando ensayos numéricos simples. Corra una versión del modelo sin dilatación y revise que las diferencias sean razonables;
6. La dependencia de la malla es una falla fatal. A menos que esté absolutamente seguro acerca de las implicancias, evite modelar ablandamiento de deformación. Si usted debe usar ablandamiento de deformación, corra el modelo completo usando dos mallas, notoriamente diferentes en las zonas de ablandamiento de deformación;
7. Haga modelos con el propósito de estimar los indicadores de capacidad de servicio solamente cuando tenga resultados de ensayo adecuados. No construya un modelo “avanzado” en base a las estimaciones de parámetros.

Estas siete recomendaciones se basan en muchos años de experiencia construyendo, usando, interpretando y revisando modelos numéricos para aplicaciones geotécnicas y podría ser útil para las personas que ocasionalmente usan modelos numéricos en la práctica de ingeniería de rocas.

## AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a sus colegas de SRK Consulting y sus asistentes y estudiantes de la Universidad de Buenos Aires por las discusiones y el debate sobre el uso de modelos numéricos en geomecánica que ocurrió por más de veinte (y aún continúa). El profesor Eduardo Núñez, antiguo profesor de Mecánica de Suelos en la Universidad de Buenos Aires, es reconocido por ser la inspiración y fuente de sabiduría en los estudios del autor en el campo de la ingeniería geotécnica.

## REFERENCIAS

- Adhikary, D. P. (2010). Shortcomings in the standard continuum based implicit joint model of layered rocks. *Journal of Geology Mining Research* 2(2), pp. 23-28.
- AFTES (2003). Guidelines for characterisation of rock masses useful for the design and the construction of underground structures. *Tunnels et ouvrages souterrains* 177, 48p.
- Alejano, L. R. , Alonso, E. (2005). Considerations of the dilatancy angle in rocks and rock masses. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 42(26):481–607.
- Barton, N. (2013). Shear strength criteria for rock, rock joints, rockfill and rock masses: Problems and some solutions. *Journal of Rock Mechanics and Geotechnical Engineering*. doi:10.1016 / j.jrmge.2013.05.008.
- Benz, T., Schwab, R. (2008). A quantitative comparison of six rock failure criteria. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 45, 1176–1186. doi:10.1016/j.ijrmms.2008.01.007.
- Bobet, A. Fakhimi, A., Johnson, S. Morris, J. Tonon, F., Yeung, M. R. (2009). Numerical models in discontinuous media: review of advances for rock mechanics applications. doi:10.1061 / □ASCE□GT.1943-5606.0000133
- Chang, C., Haimson, B. (2012). A Failure Criterion for Rocks Based on True Triaxial Testing. *Rock Mechanics and Rock Engineering* 45, 1007–1010. DOI 10.1007/s00603-012-0280-8.
- Clark, I. H. (2006). Simulation of Rockmass Strength Using Ubiquitous Joints. In: Hart, Varona (eds), *Numerical Modeling in Geomechanics*, Madrid. Paper No. 08-07.
- Descamps, F., da Silva, M. R., Schroeder, C., Verbrugge, J. C., Tshibangu, J. P. (2012). Limiting envelopes of a dry porous limestone under true triaxial stress states. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 56, 88–99.
- Eberhardt, E. (2012). The Hoek–Brown Failure Criterion. ISRM suggested method. *Rock Mechanics and Rock Engineering* 45:981–988 DOI 10.1007/s00603-012-0276-4.
- Estrada, N. Taboada, A. (2013). Yield surfaces and plastic potentials of cemented granular materials from discrete element simulations. *Computers and Geotechnics* 49, 62–69.
- Feng, X. T., Hudson, J. A. (2004). The ways ahead for rock engineering design methodologies. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 41(2):255–73.
- Feng, X. T., Hudson, J. A. (2010). Specifying the information required for rock mechanics modelling and rock engineering design. (2010). doi:10.1016/j.ijrmms.2009.12.009.
- Fontoura, S. (2012). Lade and Modified Lade 3D Rock Strength Criteria. ISRM Suggested Method. *Rock Mechanics and Rock Engineering* 45, 1001–1006. DOI 10.1007/s00603-012-0279-1.
- Hudson, J. A., Feng, X. T. (2007). Updated flowcharts for rock mechanics modelling and rock engineering design. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 44, 174–95.
- Hudson, J. A., Feng, X. T. (2010). Technical auditing of rock mechanics modelling and rock engineering design. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 47, 877–886.
- Gibson, W. H. (2005). Rock Mass Strength derived from Rock Mass Characterization. *Alaska Rocks* 2005.

- Guo, P., Stolle, D. (2004). The extension of Rowe's stress-dilatancy model to general stress condition. *Soils and Foundations* 44(4):1–10.
- Haimson, B. C., Bobet, A. (2012). Introduction to suggested methods for failure criteria. ISRM suggested method. *Rock Mechanics and Rock Engineering* doi:10.1007/s00603-012-0274-6.
- Hoek, E., Carranza-Torres, C. T., Corkum, B. (2002). Hoek–Brown failure criterion—2002 edition. 5 North American Rock Mechanics Symposium, Toronto, pp 267–273.
- Hoek, E. (2009). Fundamentals of slope design. Keynote address at Slope Stability 2009, Santiago, Chile.
- Ivars, D. M., Pierce, M. E., Darcel, C. (2011). The synthetic rock mass approach for jointed rock mass modelling. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* doi:10.1016 / j.ijrmms.2010.11.014.
- Lade, P., Duncan, J. (1973). Cubical triaxial tests on cohesionless soils. *ASCE Journal on Soil Mechanics and Foundations Division*, 99(SM10):793–811.
- Lade, P. (1997). Modelling the strengths of engineering materials in three dimensions. *Mechanics of Cohesive Frictional Materials* 2(4), 339–356.
- Lee, Y. K., Pietruszczak, S., Choi, B. H. (2012). Failure criteria for rocks based on smooth approximations to Mohr–Coulomb and Hoek–Brown failure functions. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 56, 146–160.
- Lee, Y. K., Bobet, A. (2013). Instantaneous Friction Angle and Cohesion of 2-D and 3-D Hoek–Brown Rock Failure Criteria in Terms of Stress Invariants. *Rock Mechanics and Rock Engineering* 47, 371–385.
- Leps, T. (1970). Review of shearing strength of rockfill. *Journal of the Soils Mechanics and Foundation Division ASCE* 96 (SM4), 1159–1170.
- Liu, M., Gao, Y., Liu, H. (2012). A nonlinear Drucker–Prager and Matsuoka–Nakai unified failure criterion for geomaterials with separated stress invariants. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 50, 1–10.
- Manzari, M. T., Nour, M. A. (2000). Significance of soil dilatancy in slope stability analysis. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering* 126, 75–80.
- Matsuoka, H., Nakai, T. (1974). Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses. *Proceedings of the Japan Society of Civil Engineers* 233:59–70.
- Meyer, J. P., Labuz, J. F. (2013). Linear failure criteria with three principal stresses. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 60, 180–187.
- Mogi, K. (2006). *Experimental rock mechanics*. Taylor and Francis, 361p. ISBN 0-203-96444-6.
- Mylvaganam, J., Baczynski, N. R., de Bruyn, I. A., Price, J. R. (2011). Distinct Element Analyses for Calibration of Rock Slope Properties. *Slope stability 2011*, Vancouver, 12p.
- Pierce, M., Cundall, P. A., Potyondy, D. (2007). A synthetic rock mass model for jointed rock. 1 Canada – US Rock Mechanics Symposium, Vancouver, 341–349.
- Potts, D., Axelsson, K., Grande, L., Schweiger, H., Long, M. (2002). Guidelines for the use of advanced numerical analyses. *Thomas Telford*, 177 p.

- Sainsbury, B., Pierce, M., Ivars, D. M. (2008a). Simulation of rock mass strength anisotropy and scale effects using a Ubiquitous Joint Rock Mass (UJRM) model. In: Hart, Detournay & Cundall (eds.). *Continuum and Distinct Element Numerical Modeling in Geo-Engineering*. ISBN 978-0-9767577-1-9. Paper 06-02.
- Sainsbury, B., Pierce, M., Ivars, D. M. (2008b). Analysis of Caving Behaviour Using a Synthetic Rock Mass — Ubiquitous Joint Rock Mass Modelling Technique. *Southern Hemisphere Int Rock Mechanics*, Perth, 1, 343-252.
- Sfriso, A. (2010). Caracterización mecánica de materiales constituidos por partículas. Ph. D. Thesis. University of Buenos Aires, 204p.
- Sfriso, A., Weber, G. (2010). Formulation and validation of a constitutive model for sands in monotonic shear. *Acta Geotechnica* 5, 257–272. DOI 10.1007/s11440-010-0127-y.
- Sfriso, A., Weber, G., Núñez, E. (2011). Formulación de una regla de flujo no asociativa basada en la teoría de tensión-dilatancia de Rowe. *Revista Internacional de Desastres Naturales, Accidentes e Infraestructura Civil*, 12 (1) 19-26.
- Sriapai, T., Walsri, C. Fuenkajorn, K. (2013). True-triaxial compressive strength of Maha Sarakham salt. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 61, 256–265.
- Tsegaye, A. B., Benz, T. (2014). Plastic flow and state-dilatancy for geomaterials. *Acta Geotechnica* 9, 329–342.
- Vermeer, P.A., De Borst, R. (1984). Non-associated plasticity for soils, concrete and rock. *Heron* 29(3): 1-64.
- Wang, T. T., Huang, T. H. (2009). A constitutive model for the deformation of a rock mass containing sets of ubiquitous joints. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 46, 521–530.
- Yu, M. H., Zan, Y. W., Zhao, J., Yoshimine, M. (2002). A unified strength criterion for rock material. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 39, 975–989.
- Zea, E., Celestino, T. B. (2011). Failure Mechanisms and Rock Mass Damage of High Rock Slopes in Open Pit Mine. *Slope stability 2011*, Vancouver, 11p.
- Zhang, Q., Zhu, H., Zhang, L. (2013). Modification of a generalized three-dimensional Hoek–Brown strength criterion. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* doi:10.1016 / j.ijrmms.2012.12.009.
- Zhang, L. (2009). Estimating the Strength of Jointed Rock Masses. *Rock Mechanics and Rock Engineering* 43, 391–402. DOI 10.1007/s00603-009-0065-x.
- Zhao, X. G., Caic, M. (2010). Influence of plastic shear strain and confinement-dependent rock dilation on rock failure and displacement near an excavation boundary *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 47 (5), 723–738.
- Zhao, X. Evans, T. M. (2009). Discrete simulations of laboratory loading conditions. *Int Journal of Geomechanics*. doi:10.1061/□ASCE□1532-3641-2009-9:4-169.