

## UN MODELO NUMÉRICO SIMPLE PARA EL ANÁLISIS NO-LINEAL DE VIGAS PRISMÁTICAS DE LAMINADOS COMPUESTOS

Alejandro Verri Kozlowski<sup>1\*</sup>

1: Departamento de Estabilidad.  
Facultad de Ingeniería  
Universidad de Buenos Aires  
Paseo Colón 850 (C1063ACV) Buenos Aires, Argentina  
e-mail: averri@fi.uba.ar web: <http://www.fi.uba.ar/materias/mlc>

**Palabras clave:** Laminados Compuestos, Anisotropía, Análisis No-lineal, Torsión, Corte, Elementos Finitos.

**Resumen.** *Se presenta la formulación de un elemento finito de viga 3D para el análisis no-lineal de secciones prismáticas anisótropas de laminados compuestos, sometidas a esfuerzos combinados de flexión, corte y torsión. El modelo propone una formulación del campo de desplazamientos modificado y un conjunto de funciones de forma clase C1 que consideran el acoplamiento entre desplazamientos extensionales y distorsiones y admiten el alabeo de la sección. Bajo una formulación lagrangiana total (TL) del equilibrio, se formula una matriz tangente no-lineal de rigidez considerando desplazamientos y tensiones iniciales. El elemento fue implementado numéricamente y se obtuvieron algunos resultados para problemas conocidos.*

## 1 INTRODUCCIÓN

En los últimos años un importante número de formulaciones de elementos finitos de viga para el análisis de vigas de materiales anisótropos en general y laminados compuestos reforzados con fibras en particular, han sido propuestas. Estas formulaciones, en su mayoría, se basan en las hipótesis de Euler-Bernoulli o Timoshenko-Reissner, que asumen como hipótesis cinemática fundamental el mantenimiento de las secciones planas luego de la deformación.

La consideración de dicha hipótesis de linealidad cinemática supone que la existencia de esfuerzos de torsión y corte no produce el alabeo de las secciones. Esto se cumple automáticamente con formulaciones de corte en donde las distorsiones de corte sean constantes en la altura del elemento, y en el caso de torsión combinada, sobre secciones circulares. Es un hecho bien conocido que la existencia de esfuerzos de torsión en secciones no circulares causan el alabeo de las secciones transversales del elemento, equivalente a la pérdida de la hipótesis de secciones planas. La consideración simultánea de las deformaciones por corte y torsión, establece una serie de relaciones cinemáticas entre los giros de torsión y flexión y los desplazamientos transversales y longitudinales que no son tomados en cuenta por dichas formulaciones.

El campo completo de desplazamientos y deformaciones de un sólido tridimensional prismático se puede obtener a partir de la combinación de las soluciones de los cuatro problemas fundamentales de Saint Venant. Basadas en estas soluciones, algunas formulaciones avanzadas de elementos finitos [12] analizan el problema de la viga tridimensional de sección rectangular como un problema de deformación de sólidos tridimensionales bajo cargas en sus extremos, mediante la incorporación de funciones de forma y matrices de interpolación muy complejas.

Otras formulaciones cinemáticas, conocidas como teorías de vigas de corte de orden superior (HSDT), son capaces de considerar una distribución arbitraria del campo de desplazamientos en el plano de la sección transversal al introducir los efectos del corte mediante una discretización adicional al nivel de las láminas [7], [13]. Las teorías HSDT se basan en general en formular un campo de distorsiones por corte arbitrario que debe cumplir las condiciones de borde libre de tensiones en los extremos de la sección transversal, incorporando grados de libertad adicionales en la altura de la sección con una discretización que podrá ser mayor, igual o menor al número de láminas. Estas hipótesis cinemáticas, junto a la relajación de la hipótesis de indeformabilidad de las normales, equivalen en la práctica a un análisis tridimensional condensado del elemento de viga

La anisotropía que incorporan los materiales constitutivos del laminado establece la necesidad de almacenar y evaluar en cada punto de integración, las relaciones constitutivas entre tensiones y deformaciones de un material ortótropo con nueve (o cinco) constantes materiales que deberán ser analizadas en una dirección particular con coeficientes aparentes adicionales. Como ejemplo, en un modelo de elementos finitos de viga, con una malla elementos de dos puntos de Gauss y con una sección transversal de veinte láminas, se requieren aproximadamente unas 300 evaluaciones de la ecuación constitutiva tensorial, para cada elemento y en el caso de problemas no-lineales, en cada iteración. Este elevado costo

computacional de arranque, hace crítica la necesidad de modelos sencillos, robustos y computacionalmente económicos, con capacidad de predecir correctamente el campo completo de desplazamientos con un mínimo número de elementos y con un número reducido de iteraciones, y establecen la motivación del presente trabajo.

### 1.1 Revisión de la teoría clásica de vigas

Una revisión detallada de la literatura existente sobre el análisis de vigas, inclusive cuando fuera particularizada a las aplicaciones de laminados compuestos, excede el alcance del presente trabajo. Sin embargo una breve discusión sobre las teorías clásicas de la resistencia de materiales es fundamental para comprender cuales serían los requisitos que debiera poseer un modelo para el análisis de vigas anisótropas prismáticas sometido a esfuerzos combinados de flexión, corte y torsión, basado en la teoría de vigas.

La teoría clásica de vigas, empleada habitualmente en los problemas de ingeniería, parte de la hipótesis cinemática fundamental del mantenimiento de las secciones planas luego de la deformación, hipótesis que permite formular un campo completo de desplazamientos aproximado en función de las rotaciones de flexión y desplazamientos transversales del eje de referencia de la viga. Si no se consideran las deformaciones por corte en ambos planos de flexión, se verifican las hipótesis de Euler-Bernoulli, ya que el plano medio transversal se mantiene perpendicular al plano medio longitudinal. En estas formulaciones, conocidas en la teoría de laminados como CLPT (*Classical Laminate Plate Theory*), las deflexiones son subestimadas y las frecuencias naturales y cargas críticas de pandeo son sobrestimadas.

Cuando se consideran las deformaciones por corte, deben efectuarse hipótesis adicionales sobre la distribución de las mismas sobre la sección transversal. En primera aproximación se puede admitir únicamente la existencia de deformaciones de corte constantes en toda la sección. Esta distorsión por corte del plano transversal modifica el giro de flexión y causa que las secciones planas ya no sean perpendiculares al eje medio de la viga, y permiten en definitiva, considerar de manera lineal los efectos de las deformaciones por corte sobre los desplazamientos del elemento. En las teorías de laminados, estas hipótesis corresponden a una teoría de deformaciones de corte de primer orden o FSDT (*First-order Shear Deformation Theory*). Sin embargo, las formulaciones cinemáticas de teorías FSDT no consideran el efecto de la torsión sobre el campo de desplazamientos y requieren además de factores de corrección para el valor de la energía de deformación, debido a que la distribución de tensiones tangenciales viola las condiciones de bordes libres de tensiones. La obtención de dichos factores de corrección no es una tarea sencilla cuando las relaciones constitutivas son de naturaleza anisótropa [10].

En el caso particular de la torsión uniforme en secciones transversales de sección circular, los desplazamientos relativos longitudinales no se modifican y verifican las hipótesis de la teoría elemental de Coulomb. Si las secciones no son circulares, una solución cerrada puede obtenerse a partir de la teoría de Saint Venant mediante la incorporación de una función de corrección  $\chi_x(y, z)$  que modifica el campo de desplazamientos longitudinales. La función  $\chi_x(y, z)$ , se denomina función de *Warping* o alabeo y se obtiene como la solución del

problema de la teoría de la elasticidad de la viga sometida a un par torsor en sus extremos (Tercer Problema de Saint-Venant).

En general, para los problemas de vigas sometidas a esfuerzos axiales, de corte, de flexión y torsión, el campo completo de desplazamientos y deformaciones de un sólido tridimensional prismático se puede obtener a partir de la teoría de la elasticidad, como la combinación de las soluciones de los cuatro problemas fundamentales de Saint Venant [9].

La existencia simultánea de esfuerzos de flexión, corte y torsión en vigas anisótropas de sección no circular, requiere de la formulación de un campo de desplazamientos y de un conjunto de funciones especiales de interpolación, que puedan evaluar la influencia real de las distorsiones de corte y torsión sobre los desplazamientos transversales. La formulación de un campo de desplazamientos basado en la teoría de vigas resulta en un modelo sencillo, robusto y computacionalmente económico y ése es el objeto de los párrafos subsiguientes.

## 2 FORMULACIÓN CINEMÁTICA

Basado en la teoría de vigas, se propone en la presente formulación un campo de desplazamientos aproximado para el elemento de viga tridimensional prismático de eje recto, a partir de un conjunto de funciones definidas sobre un sistema de coordenadas local del elemento  $\{ {}^t\hat{x}, {}^t\hat{y}, {}^t\hat{z} \}$ , solidario al eje medio de la barra.

El campo de desplazamientos propuesto supone inicialmente la hipótesis del mantenimiento de secciones planas luego de la deformación, la cual permite expresar todos los desplazamientos de la sección transversal a partir de los desplazamientos del eje medio del elemento  ${}^t\hat{u}^o, {}^t\hat{v}^o, {}^t\hat{w}^o$ . Para considerar los efectos de la torsión sobre la sección transversal, se ha incorporado a la componente de desplazamientos longitudinales (1) un término de corrección que sólo dependerá de las variables del plano de la sección transversal  ${}^t\chi_x = {}^t\chi_x({}^t\hat{y}, {}^t\hat{z})$ . La inclusión de este término equivale a relajar la hipótesis de secciones planas original.

$${}^t\hat{u} \approx {}^t\hat{u}^o + {}^t\hat{y} \cdot {}^t\hat{\theta}_z - {}^t\hat{z} \cdot {}^t\hat{\theta}_y + {}^t\hat{\chi}_x \cdot {}^t\hat{\theta}_{x,x} \quad (1)$$

$${}^t\hat{v} \approx {}^t\hat{v}^o - {}^t\hat{z} \cdot {}^t\hat{\theta}_x \quad (2)$$

$${}^t\hat{w} \approx {}^t\hat{w}^o + {}^t\hat{y} \cdot {}^t\hat{\theta}_x \quad (3)$$

En una formulación lagrangiana total, las derivadas de las funciones que definen el campo de desplazamientos se refieren a las variables configuración inicial de referencia, con la notación habitual  $(*)_{,x} = d*/d^o\hat{x}$ . Las relaciones cinemáticas entre los giros y los desplazamientos del campo de desplazamientos propuesto, se pueden obtener a partir de la medida de deformación (lineal) del tensor de pequeñas deformaciones.

$${}^t\hat{e}^{ij} = \frac{1}{2} \cdot ({}^t\hat{u}^{j,i} + {}^t\hat{u}^{i,j}) \quad (4)$$

Desarrollando las componentes  ${}^t\hat{u}^{j,i}$  del tensor gradiente de desplazamientos de la expresión (4) y asumiendo la hipótesis de indeformabilidad del plano de la sección transversal

(el plano se alabea pero no cambia de forma) se obtienen las expresiones de las distorsiones angulares.

$${}^t\hat{\gamma}_{xy} = 2 \cdot {}^t\hat{e}^{xy} = \hat{v}_{,x}^o + {}^t\hat{\theta}_z + {}^t\hat{\theta}_{x,x} \cdot ({}^t\hat{\chi}_{x,y} - {}^t\hat{z}) \quad (5)$$

$${}^t\hat{\gamma}_{xz} = -2 \cdot {}^t\hat{e}^{xz} = -{}^t\hat{w}_{,x}^o + {}^t\hat{\theta}_y - {}^t\hat{\theta}_{x,x} \cdot ({}^t\hat{\chi}_{x,z} + {}^t\hat{y}) \quad (6)$$

En la obtención de las expresiones dadas en (6), se asumió que el giro específico de torsión es constante dentro del elemento ( $d^2\theta_x/dx^2 = 0$ ). De lo contrario, existirán derivadas no nulas de las distorsiones angulares ( $\partial {}^t\hat{\gamma}_{xz}/\partial {}^o\hat{x} \neq 0$ ,  $\partial {}^t\hat{\gamma}_{xy}/\partial {}^o\hat{x} \neq 0$ ) que violan la ecuación de equilibrio diferencial del elemento.

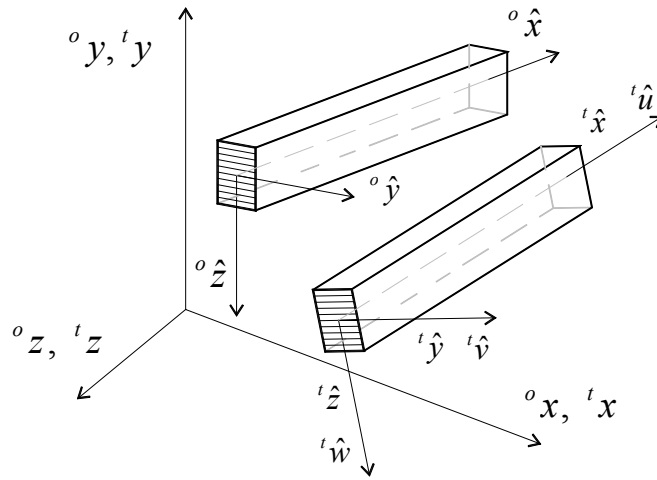


Figura 1 Sistemas de coordenadas global  $\{x\}$  y local  $\{\hat{x}\}$  del elemento. Configuración inicial de referencia y configuración espacial para un instante  $t$ .

$${}^t\hat{u}_1 \equiv {}^t\hat{u}, {}^t\hat{u}_2 \equiv {}^t\hat{v}, {}^t\hat{u}_3 \equiv {}^t\hat{w} \quad {}^o\hat{x}_1 \equiv {}^o\hat{x}, {}^o\hat{x}_2 \equiv {}^o\hat{y}, {}^o\hat{x}_3 \equiv {}^o\hat{z}$$

El signo negativo de la expresión (6) se debe a que la distorsión de corte simple debe producir trabajo positivo para un esfuerzo de corte positivo. Con las hipótesis efectuadas, el campo de desplazamientos propuesto verifica la hipótesis de indeformabilidad del plano transversal ( ${}^t\hat{\gamma}_{yz} = 0$ ) según se verifica en la expresión (7)

$${}^t\hat{\gamma}_{yz} = 2 \cdot {}^t\hat{e}^{yz} = ({}^t\hat{v}_{,z} + {}^t\hat{w}_{,y}) = -{}^t\hat{\theta}_x + {}^t\hat{\theta}_x = 0 \quad (7)$$

El término de alabeo se puede obtener a partir de la solución del Tercer Problema de Saint Venant para una sección prismática tridimensional sometida a un par torsor en sus extremos definida según la serie infinita (8). La determinación del término de alabeo para secciones de forma arbitraria, puede consultarse en los textos clásicos sobre la teoría matemática de elasticidad.

$${}^t\hat{\chi}_x = {}^t\hat{\chi}_x({}^t\hat{y}, {}^t\hat{z}) = {}^t\hat{y} \cdot {}^t\hat{z} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4(-1)^n \cdot \sin(k_n \cdot {}^t\hat{y}) \cdot \sinh(k_n \cdot {}^t\hat{z})}{\frac{b_o}{2} \cdot (k_n)^3 \cdot \cosh\left(k_n \cdot \frac{h_o}{2}\right)} \quad k_n = \frac{(2n+1) \cdot \pi}{b_o} \quad (8)$$

La serie infinita converge rápidamente y requiere de pocos términos para obtener resultados de precisión razonable. No obstante, la elección del número de términos adecuado dependerá de la relación de lados de las secciones transversales del problema analizado ( $b_o/h$ ), por lo que la implementación numérica de la formulación propuesta en (8) debería admitir un número variable de términos. En el caso de secciones circulares, la función de warping debe ser nula en todo el dominio.

## 2.1 Interpolación del campo de desplazamientos. Formulaciones clase C0 y C1

El campo completo de desplazamientos del elemento de viga tridimensional puede representarse mediante un vector (9) cuyas componentes son los desplazamientos longitudinales y transversales, medidos desde el origen de sistema de coordenadas locales solidario con el elemento y en una configuración espacial en un tiempo  $t$ , como se muestra en la Figura 1

$$\left\{ {}^t\hat{\mathbf{u}} \right\}^T = \left\{ {}^t\hat{u} \quad {}^t\hat{v} \quad {}^t\hat{w} \right\} = \left\{ {}^t\hat{u}({}^t\hat{x}, {}^t\hat{y}, {}^t\hat{z}) \quad {}^t\hat{v}({}^t\hat{x}, {}^t\hat{y}, {}^t\hat{z}) \quad {}^t\hat{w}({}^t\hat{x}, {}^t\hat{y}, {}^t\hat{z}) \right\} \quad (9)$$

En un contexto de elementos finitos basados en desplazamientos, el campo continuo propuesto en (1) podrá ser obtenido de manera aproximada mediante la interpolación de variables cinemáticas discretas definidas en cada nodo del elemento. La elección del esquema de interpolación adoptado será crítica en lo que respecta al costo computacional del modelo.

El esquema de interpolación más económico y eficiente desde el punto de vista computacional, es el esquema isoparamétrico con continuidad de clase C0, muy empleado en formulaciones de elementos de viga de eje curvo [5]. Sin embargo, es bien conocido el hecho de que la utilización de este tipo de interpolación en vigas de eje recto requiere de consideraciones particulares relacionadas con las deformaciones por corte. Para representar correctamente el giro de las secciones planas simultáneamente con una deformada transversal lineal, los elementos de clase C0 *deben* considerar a las deformaciones por corte en su cinemática, pero la gran cantidad de energía de corte necesaria para lograr “enderezar” a la barra deformada obligará luego al empleo de técnicas numéricas para subestimar y corregir la energía de deformación por corte en la determinación de la matriz de rigidez del elemento. Es decir que en las formulaciones de continuidad clase C0, la deformación por corte debe ser considerada para establecer la cinemática correcta, pero la mayoría del corte luego debe ser “removido” para recuperar la rigidez correcta. Luego, capturar la deformación por corte no es el objetivo de dichas formulaciones [6].

En elementos de viga de eje recto es natural y mucho más eficiente emplear interpolaciones de clase C1 debido a que por su alta precisión, requieren aproximadamente la mitad de elementos para representar el mismo campo de desplazamientos que una malla con elementos de continuidad C0 [3]. Por otra parte, los desplazamientos se interpolan de manera

consistente con los giros y las deformaciones por corte, lo cual evita problemas de bloqueo por corte y esquemas de integración reducida de la matriz de rigidez del elemento.

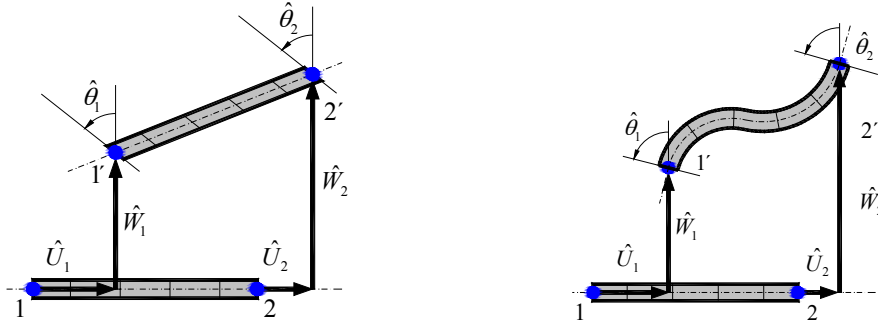


Figura 2 Desplazamientos y giros según una formulación de continuidad clase C0 y una formulación hermítica C1 (Ref. [6])

## 2.2 Funciones de forma

En la presente formulación se adoptará un esquema de interpolación hermítico con continuidad clase C1, para la interpolación de las componentes transversales de los desplazamientos,  ${}^t\hat{v}^o$  y  ${}^t\hat{w}^o$  definidas en el eje del elemento, en el sistema de coordenadas local.

$${}^t\hat{v}^o \approx b_0 + b_1 \cdot {}^t\hat{x} + b_2 \cdot ({}^t\hat{x})^2 \quad (10)$$

$${}^t\hat{w}^o \approx c_0 + c_1 \cdot {}^t\hat{x} + c_2 \cdot ({}^t\hat{x})^2 \quad (11)$$

La consideración de las deformaciones por corte en la presente formulación, requiere que las mismas deberán mantenerse constantes en el elemento. Luego, las variables cinemáticas  ${}^t\hat{\gamma}_{xz}$  y  ${}^t\hat{\gamma}_{xy}$  se almacenan en un único nodo central interno que deberá ser condensado estáticamente previo al proceso de ensamblaje de la matriz de rigidez.

$${}^t\hat{\gamma}_{xz} \approx f_0 \quad {}^t\hat{\gamma}_{xy} \approx g_0 \quad (12)$$

Tanto para los desplazamientos longitudinales como para los giros de torsión, se utilizarán esquemas de interpolación con continuidad de clase C0 (funciones de forma lineales). La función C0 elegida para los giros de torsión garantiza el cumplimiento de la hipótesis de indeformabilidad de las secciones transversales ( $d^2\theta_x/dx^2 = 0$ ).

$${}^t\hat{u}^o = a_0 + a_1 \cdot {}^t\hat{x} \quad (13)$$

$${}^t\hat{\theta}^o = d_0 + d_1 \cdot {}^t\hat{x} \quad (14)$$

Las condiciones de borde del problema de interpolación se establecen para cada grado de libertad del elemento. Considerando el problema del elemento de viga de dos nodos con seis grados de libertad por nodo y asumiendo además dos distorsiones constantes en todo elemento, se tienen catorce grados de libertad.

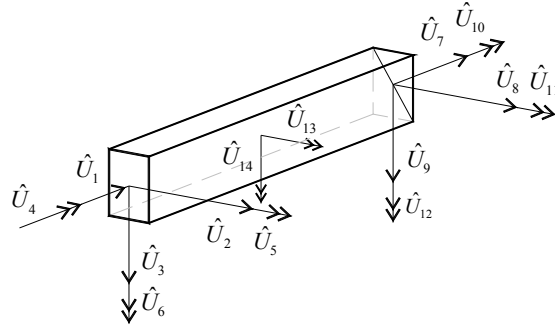


Figura 3 Grados de libertad medidos sobre el sistema de coordenadas locales del elemento. Los grados de libertad internos  ${}^t\hat{U}_{13}$  y  ${}^t\hat{U}_{14}$  corresponden a las distorsiones  ${}^t\hat{\gamma}_{xz}$ ,  ${}^t\hat{\gamma}_{xy}$ .

En un contexto de elementos finitos basados en desplazamientos, el campo completo de desplazamientos en un punto arbitrario de la sección transversal se podrá aproximar mediante una interpolación numérica empleando un conjunto de funciones de interpolación  $h_m^{(i)} = h_m^{(i)}({}^t\hat{x}, {}^t\hat{y}, {}^t\hat{z})$  según (15).

$$\hat{u}^{(i)} \approx h_m^{(i)} \cdot \hat{U}_m \quad (15)$$

En la presente formulación se sigue la convención de la suma, salvo que se indique expresamente lo contrario. Los índices superiores (superíndices a derecha) se refieren en general a las componentes de desplazamiento del campo y los índices inferiores (subíndices a derecha), a los grados de libertad del elemento que se indican en la Figura 3. En particular, en la expresión (15) el índice  $m$  suma desde 1 hasta  $N$  siendo  $N=14$  el número de grados de libertad del elemento de viga tridimensional, y el índice  $i$  varía desde 1 hasta  $i=3$ .

Los vectores  $h_m^{(i)}$  serán arreglos de  $1 \times N$  asociados a cada uno de las componentes del campo de desplazamientos y podrán agruparse en una matriz de interpolación de  $3 \times N$ .

$$[\mathbf{H}]^T = \begin{bmatrix} \mathbf{h}^{(1)} \\ \mathbf{h}^{(2)} \\ \mathbf{h}^{(3)} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} h_1^{(1)} & h_2^{(1)} & \dots & h_N^{(1)} \\ h_1^{(2)} & h_2^{(2)} & \dots & h_N^{(2)} \\ h_1^{(3)} & h_1^{(3)} & \dots & h_N^{(3)} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Las funciones de forma propuestas en la presente formulación verifican las condiciones de suma unitaria en todo el dominio del elemento, y satisfacen uno de los dos requisitos fundamentales de convergencia de convergencia monótonica (completitud) [2].

$$\sum_{k=1}^N h_k^{(i)} = 1 \quad (17)$$

En problemas de naturaleza membranar, la interpolación del campo de desplazamientos longitudinales podría modificarse adoptando un esquema jerárquico, mediante la incorporación de nodos internos adicionales. Sin embargo, este tipo de funciones de forma no verifica las condiciones de convergencia dadas en (17).

Las componentes de la matriz de interpolación del campo de desplazamientos, se detallan en la Figura 4

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot y & \frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot z & -\varphi_2 & -\varphi_3 \cdot z & \varphi_3 \cdot y & \frac{x}{L} & -\frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot y & -\frac{6 \cdot \varphi_1}{L} \cdot z & \varphi_2 & \varphi_4 \cdot z & -\varphi_4 \cdot y & -6 \cdot \varphi_1 \cdot z & 6 \cdot \varphi_1 \cdot y \\ 0 & \varphi_5 & 0 & -\left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot z & 0 & -\varphi_6 & 0 & \varphi_7 & 0 & -\frac{x}{L} \cdot z & 0 & \varphi_1 \cdot x & 0 & \varphi_8 \\ 0 & 0 & \varphi_5 & \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot y & \varphi_6 & 0 & 0 & 0 & \varphi_7 & \frac{x}{L} \cdot y & -\varphi_1 \cdot x & 0 & -\varphi_8 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{(L-x) \cdot x}{L^2} \quad \varphi_2(y, z) = \frac{1}{L} \left( \chi - z \cdot \frac{\partial \chi}{\partial z} - y \cdot \frac{\partial \chi}{\partial y} \right) \quad \varphi_3(x) = \frac{(L-3x) \cdot (L-x)}{L^2} \quad \varphi_4(x) = \frac{(2L-3x) \cdot x}{L^2}$$

$$\varphi_5(x) = \frac{(L-x)^2 \cdot (L+2x)}{L^3} \quad \varphi_6(x) = \frac{(L-x)^2 \cdot x}{L^2} \quad \varphi_7(x) = \frac{(3L-2x) \cdot x^2}{L^3} \quad \varphi_8(x) = \frac{(L-2x) \cdot (L-x) \cdot x}{L^2}$$

Figura 4 Funciones de forma modificadas para el elemento de viga tridimensional, considerando deformaciones por corte y torsión con alabeo.

### 2.3 Interpolación del campo de deformaciones

En una formulación geoméricamente no-lineal, las componentes del tensor de deformaciones para una configuración deformada arbitraria pueden obtenerse a partir de la medida de deformación de Green Lagrange, definida sobre la configuración de referencia en  ${}^o\hat{x}$ ,  ${}^o\hat{y}$ ,  ${}^o\hat{z}$  según

$${}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}^{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left( {}^{t+\Delta t}\hat{u}^{j,i} + {}^{t+\Delta t}\hat{u}^{i,j} + {}^{t+\Delta t}\hat{u}^{k,i} \cdot {}^{t+\Delta t}\hat{u}^{k,j} \right) \quad (18)$$

En una formulación incremental del equilibrio, el campo de desplazamientos en una configuración desconocida en  $t + \Delta t$  podrá formularse a partir de una deformación conocida en la configuración  $t$  según el incremento finito  ${}^{t+\Delta t}\hat{u}^i = {}^t\hat{u}^i + \Delta\hat{u}^i$ . Del mismo modo, la deformación en una configuración no-conocida en  $t + \Delta t$  queda determinada según  ${}^{t+\Delta t}\hat{\epsilon}^{ij} = {}^t\hat{\epsilon}^{ij} + \Delta\hat{\epsilon}^{ij}$ . El incremento finito de deformaciones queda determinado según la expresión (19).

$$\Delta\hat{\epsilon}^{ij} = \frac{1}{2} \cdot \left( \Delta\hat{u}^{j,i} + \Delta\hat{u}^{i,j} + \Delta\hat{u}^{k,i} \cdot {}^t\hat{u}^{k,j} + \Delta\hat{u}^{k,j} \cdot {}^t\hat{u}^{k,i} + \Delta\hat{u}^{k,i} \cdot \Delta\hat{u}^{k,j} \right) \quad (19)$$

Según la definición del tensor de Green Lagrange, las derivadas de las componentes del campo de desplazamientos se refieren a las variables de la configuración de referencia. y se indican según la notación conocida :

$${}^{t+\Delta t}\hat{u}^{i,k} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}\hat{u}^i}{\partial {}^o\hat{x}^k} \quad \Delta\hat{u}^{i,j} = \frac{\partial \Delta\hat{u}^i}{\partial {}^o\hat{x}^j} \quad (20)$$

En un contexto de elementos finitos, el campo de deformaciones podrá ser interpolado a partir de las variables nodales independientes del elemento mediante las funciones de forma

dadas en (15) y el incremento de desplazamientos interpolado según  $\Delta \hat{u}^{i,j} \approx h_m^{i,j} \cdot \Delta \hat{U}_m$

$$\Delta \hat{\varepsilon}^{ij} \approx \frac{1}{2} \cdot (h_m^{j,i} + h_m^{i,j} + h_m^{k,i} \cdot {}^t \hat{u}^{k,j} + {}^t \hat{u}^{k,i} \cdot h_m^{k,j}) \cdot \Delta \hat{U}_m + \frac{1}{2} \cdot \Delta \hat{U}_m \cdot (h_m^{k,i} \cdot h_n^{k,j}) \cdot \Delta \hat{U}_n \quad (21)$$

El símbolo de igualdad aproximada  $\approx$  en las expresiones anteriores refiere al hecho de que se ha aproximado el campo de desplazamientos mediante funciones de interpolación a partir de valores conocidos del campo en los nodos del elemento, a diferencia de la igualdad estricta en la expresión (19) que no involucra ningún tipo de aproximación. En las expresiones anteriores, los términos asociados a las derivadas  ${}^t \hat{u}^{k,i}$  serán luego los términos que formaran la matriz de deformaciones o desplazamientos iniciales, en la formulación de la matriz tangente de rigidez. Estos términos podrán interpolarse también con las funciones de forma dadas en (16)

$${}^t \hat{u}^{k,i} \approx h_n^{k,i} \cdot \hat{U}_n \quad (22)$$

En adelante se hace conveniente el empleo de notación contraída, o notación de Vöigt la cual permite representar a los tensores de segundo y cuarto orden mediante arreglos unidimensionales (vectores) y bidimensionales (matrices). En un abuso de notación, las expresiones tensoriales expresadas en notación contraída, llevan los índices contraídos entre paréntesis. Las componentes del tensor de deformaciones en notación contraída, podrán expresarse según el arreglo unidimensional (23):

$$\{\Delta \hat{\varepsilon}\}^T = \{\Delta \hat{\varepsilon}^{(1)} \Delta \hat{\varepsilon}^{(2)} \Delta \hat{\varepsilon}^{(3)} \Delta \hat{\varepsilon}^{(4)} \Delta \hat{\varepsilon}^{(5)} \Delta \hat{\varepsilon}^{(6)}\} \equiv \{\Delta \hat{\varepsilon}^{11} \Delta \hat{\varepsilon}^{22} \Delta \hat{\varepsilon}^{33} 2\Delta \hat{\varepsilon}^{23} 2\Delta \hat{\varepsilon}^{13} 2\Delta \hat{\varepsilon}^{12}\} \quad (23)$$

Desarrollando las expresiones anteriores, las componentes del incremento de deformaciones en notación de Vöigt, pueden expresarse según una matriz de interpolación de deformaciones, dependiente del campo de desplazamientos al inicio del incremento  ${}^t \hat{U}$ .

$$\{\Delta \hat{\varepsilon}\}^{(i)} \approx \left( [{}^t \hat{B}_L]_m^{(i)} + \{\Delta \hat{U}\}_n \cdot [{}^t \hat{B}_{NL}]_{mn}^{(i)} \right) \cdot \{\Delta \hat{U}\}_m \quad (24)$$

Las componentes de las matrices de interpolación de deformaciones quedan determinadas según las expresiones (25) a (27)

$$[{}^t \hat{B}_L]_p^{(i)} = h_p^{i,i} + {}^t \hat{U}_q \cdot (h_p^{k,i} \cdot h_q^{k,i}) \quad [{}^t \hat{B}_{NL}]_{pq}^{(i)} = \frac{1}{2} \cdot (h_p^{k,i} \cdot h_q^{k,i}) \quad i = 1, 2, 3 \text{ (no sum.)} \quad (25)$$

$$[{}^t B_L]_p^{(5)} = (h_p^{3,1} + h_p^{1,3}) + {}^t \hat{U}_q \cdot (h_p^{k,1} \cdot h_q^{k,3} + h_q^{k,1} \cdot h_p^{k,3}) \quad [{}^t B_{NL}]_{pq}^{(5)} = (h_p^{k,1} \cdot h_q^{k,3}) \quad (26)$$

$$[{}^t B_L]_p^{(6)} = (h_p^{2,1} + h_p^{1,2}) + {}^t \hat{U}_q \cdot (h_p^{k,1} \cdot h_q^{k,2} + h_q^{k,1} \cdot h_p^{k,2}) \quad [{}^t B_{NL}]_{pq}^{(6)} = (h_p^{k,1} \cdot h_q^{k,2}) \quad (27)$$

La relación no-lineal dada en (24), obligará luego en la formulación incremental del equilibrio, a encontrar una expresión aproximada lineal del incremento finito de deformaciones, de modo tal que pueda ser utilizado en una ecuación constitutiva incremental lineal.

### 3 ECUACIONES CONSTITUTIVAS

En un planteo incremental, el estado de tensiones para una configuración  $t + \Delta t$  puede

determinarse según un estado de tensiones en una configuración conocida en  $t$  y un incremento finito de tensiones. Para el material anisótropo particular que aquí se trata, resultante de un apilamiento de láminas ortótropas orientadas arbitrariamente según sus ejes materiales, las ecuaciones constitutivas deberán definirse para cada una de las láminas constitutivas de la sección transversal. Luego, el incremento finito de tensiones en un punto de una lámina  $n$ -ésima, queda determinado según (28)

$${}^{t+\Delta t}{}_n\hat{S}^{ij} = {}^t{}_n\hat{S}^{ij} + {}_n\Delta\hat{S}^{ij} \quad (28)$$

En esta expresión, el índice  $n$  refiere al número de lámina, asociado a una ordenada local  ${}^o\hat{z}$  de la sección transversal y los tensores  ${}^{t+\Delta t}{}_n\hat{S}^{ij}$  y  ${}^t{}_n\hat{S}^{ij}$  corresponden al segundo tensor de Piola-Kirchoff referido a la configuración inicial y final, respectivamente. En un planteo incremental, la relación constitutiva para un material anisótropo general puede formularse según una ley constitutiva lineal dentro de algún incremento finito de tensiones y deformaciones. Los efectos de los fuertes gradientes de temperatura y humedad que existen durante el proceso de curado del laminado deben ser considerados mediante la ley de hooke generalizada para el caso no isotérmico.

$${}_n\Delta\hat{S}^{ij} = {}^t\hat{C}^{ijkl} \cdot \left[ {}_n\Delta\hat{\epsilon}^{kl} - {}^t\hat{\alpha}^{kl} \cdot ({}^{t+\Delta t}T - {}^tT) - {}^t\hat{\beta}^{kl} \cdot ({}^{t+\Delta t}c - {}^tc) \right] \quad (29)$$

La ecuación incremental (29) incluye el efecto de acoplamiento térmico, higroscópico y mecánico que tienen lugar durante el proceso de curado del laminado compuesto. En esta expresión  ${}_n\Delta\hat{S}^{ij}$  es el incremento de tensiones,  ${}^t\hat{C}^{ijkl}$  es la matriz tangente de elasticidad,  ${}^t\hat{\alpha}^{kl}$  y  ${}^t\hat{\beta}^{kl}$  son los tensores de dilatación térmica e higroscópica de la lámina respectivamente,  ${}^{t+\Delta t}T - {}^tT$  es el gradiente térmico y  ${}^{t+\Delta t}c - {}^tc$  es el gradiente de humedad que actúan sobre toda la sección transversal durante el incremento.

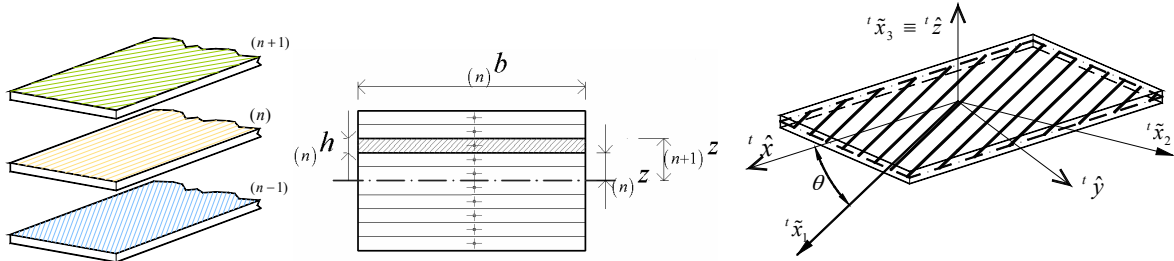


Figura 5 a) Esquema de laminación arbitrario. b) Sistema de coordenadas materiales (principales) y locales de la lámina. Los ejes locales de la lámina coinciden con el sistema de coordenadas local del elemento.

En la formulación propuesta, se asumirá como hipótesis que la temperatura y la humedad no varían durante todo el proceso incremental y se considerarán los efectos mecánicos del curado únicamente a partir de un estado de tensiones y deformaciones iniciales.

$${}_n\Delta\hat{S}^{ij} = {}^t\hat{C}^{ijkl} \cdot {}_n\Delta\hat{\epsilon}^{kl} \quad (30)$$

### 3.1 Transformación de coordenadas materiales y locales

Los tensores constitutivos de cada lámina ortótropa, están definidos en el sistema de coordenadas material (principal) de cada lámina. Los tensores constitutivos  ${}^t\hat{C}^{ijkl}$ ,  ${}^t\hat{\alpha}^{kl}$  y  ${}^t\hat{\beta}^{kl}$  están definidos para las coordenadas locales de la lámina, coincidentes con las coordenadas locales del elemento. Debido a que las láminas del laminado son específicamente orientadas según un ángulo  $\Theta^{(n)}$  referido a sus direcciones materiales, se define una matriz de transformación de coordenadas para cada lámina, según la expresión (31) donde  $\hat{\mathbf{e}}^{(j)}$  son los vectores base del sistema de coordenadas local del elemento y  $\tilde{\mathbf{e}}^{(i)}$  los vectores base del sistema de coordenadas material de la lámina ortótropa.

$$A^{ij} = \{\hat{\mathbf{e}}^i\} \cdot \{\tilde{\mathbf{e}}^j\} = \cos(\hat{\mathbf{e}}^i, \tilde{\mathbf{e}}^j) \quad \hat{x}^i = A^{ij} \cdot \tilde{x}^j \quad (31)$$

Las ecuaciones constitutivas de las láminas constitutivas del laminado orientadas arbitrariamente quedarán determinadas según las leyes de transformación de los tensores de 2<sup>do</sup> y 4<sup>to</sup> orden (32) y (34):

$${}^t_n\hat{\alpha}^{kl} = {}_nA^{kp} \cdot {}_nA^{lq} \cdot {}^t_n\tilde{\alpha}^{pq} \quad (32)$$

$${}^t_n\hat{\beta}^{kl} = {}_nA^{kp} \cdot {}_nA^{lq} \cdot {}^t_n\tilde{\beta}^{pq} \quad (33)$$

$${}^t_n\hat{C}^{ijkl} = {}_nA^{ir} \cdot {}_nA^{js} \cdot {}_nA^{kp} \cdot {}_nA^{lq} \cdot {}^t_n\tilde{C}^{rspq} \quad (34)$$

Los productos de matrices de transformación de las expresiones se pueden condensar en una única matriz de rotación de tensiones  $[T_\sigma]$  y deformaciones  $[T_\varepsilon]$ . Debido al uso de componentes no tensoriales en notación de Vöigt, estas matrices de transformación no son ortogonales sino a través de la relación  $[T_\sigma]^{-1} = [T_\varepsilon]^T$

En la Figura 6 se muestran las componentes de los tensores constitutivos y de los tensores de deformación térmica e higroscópica en notación de Vöigt para el sistema de coordenadas material de la lámina y para el sistema de coordenadas local del elemento. Las matrices constitutivas de la figura muestran los coeficientes aparentes que producen un acoplamiento adicional entre distorsiones y dilataciones por temperatura o humedad diferencial, en una lámina ortótropa arbitrariamente orientada.

La ecuación constitutiva de la sección transversal del elemento quedará determinada a partir de la integración de las diferentes ecuaciones constitutivas de las láminas que forman el laminado. Esta integración se efectúa numéricamente sobre el volumen elemental del elemento en la configuración inicial durante la formulación de la matriz de rigidez tangente del elemento, y es el objeto de los párrafos siguientes.

$${}_n[\tilde{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} \tilde{C}^{1111} & \tilde{C}^{1122} & \tilde{C}^{1133} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}^{1122} & \tilde{C}^{2222} & \tilde{C}^{2233} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{C}^{1133} & \tilde{C}^{2233} & \tilde{C}^{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{C}^{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}^{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{C}^{1212} \end{bmatrix} \quad {}_n[\hat{\mathbf{C}}] = \begin{bmatrix} \hat{C}^{1111} & \hat{C}^{1122} & \hat{C}^{1133} & 0 & 0 & \hat{C}^{1112} \\ \hat{C}^{1122} & \hat{C}^{2222} & \hat{C}^{2233} & 0 & 0 & \hat{C}^{2212} \\ \hat{C}^{1133} & \hat{C}^{2233} & \hat{C}^{3333} & 0 & 0 & \hat{C}^{3312} \\ 0 & 0 & 0 & \hat{C}^{2323} & \hat{C}^{2313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{C}^{2313} & \hat{C}^{1313} & 0 \\ \hat{C}^{1112} & \hat{C}^{2212} & \hat{C}^{3312} & 0 & 0 & \hat{C}^{1212} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 {}_n\{\tilde{\boldsymbol{\alpha}}\}^T &= \{ {}_n\tilde{\alpha}^{(1)} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{(2)} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{(3)} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{(4)} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{(5)} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{(6)} \} = \{ {}_n\tilde{\alpha}^{11} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{22} \quad {}_n\tilde{\alpha}^{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \\
 {}_n\{\tilde{\boldsymbol{\beta}}\}^T &= \{ {}_n\tilde{\beta}^{(1)} \quad {}_n\tilde{\beta}^{(2)} \quad {}_n\tilde{\beta}^{(3)} \quad {}_n\tilde{\beta}^{(4)} \quad {}_n\tilde{\beta}^{(5)} \quad {}_n\tilde{\beta}^{(6)} \} = \{ {}_n\tilde{\beta}^{11} \quad {}_n\tilde{\beta}^{22} \quad {}_n\tilde{\beta}^{33} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \} \\
 {}_n\{\hat{\boldsymbol{\alpha}}\}^T &= \{ {}_n\hat{\alpha}^{(1)} \quad \hat{\alpha}^{(2)} \quad {}_n\hat{\alpha}^{(3)} \quad {}_n\hat{\alpha}^{(4)} \quad {}_n\hat{\alpha}^{(5)} \quad {}_n\hat{\alpha}^{(6)} \} = \{ {}_n\hat{\alpha}^{11} \quad {}_n\hat{\alpha}^{22} \quad {}_n\hat{\alpha}^{33} \quad 0 \quad 0 \quad 2 \cdot {}_n\hat{\alpha}^{12} \} \\
 {}_n\{\hat{\boldsymbol{\beta}}\}^T &= \{ {}_n\hat{\beta}^{(1)} \quad {}_n\hat{\beta}^{(2)} \quad {}_n\hat{\beta}^{(3)} \quad {}_n\hat{\beta}^{(4)} \quad {}_n\hat{\beta}^{(5)} \quad {}_n\hat{\beta}^{(6)} \} = \{ {}_n\hat{\beta}^{11} \quad {}_n\hat{\beta}^{22} \quad {}_n\hat{\beta}^{33} \quad 0 \quad 0 \quad 2 \cdot {}_n\hat{\beta}^{12} \} \\
 {}_n\{\hat{\mathbf{S}}\}^T &= \{ {}_n\hat{S}^{(1)} \quad {}_n\hat{S}^{(2)} \quad {}_n\hat{S}^{(3)} \quad {}_n\hat{S}^{(4)} \quad {}_n\hat{S}^{(5)} \quad {}_n\hat{S}^{(6)} \} = \{ {}_n\hat{S}^{11} \quad {}_n\hat{S}^{22} \quad {}_n\hat{S}^{33} \quad {}_n\hat{S}^{23} \quad {}_n\hat{S}^{13} \quad {}_n\hat{S}^{12} \}
 \end{aligned}$$

Figura 6 Tensores constitutivos en notación contraída. Tensores de deformación térmica e higroscópica.

#### 4 FORMULACIÓN INCREMENTAL DEL EQUILIBRIO

En una formulación lagrangiana total (TL), el equilibrio y la compatibilidad del elemento quedan expresados a partir del principio de los desplazamientos virtuales (35) mediante la integración del trabajo de las tensiones sobre una variación virtual de las deformaciones, para una configuración en  $t + \Delta t$  y sobre el volumen de referencia inicial  $V_o$ .

$$\int_{{}_oV} {}^{t+\Delta t}\hat{S}^{ij} \cdot \delta {}^{t+\Delta t}\hat{\varepsilon}^{ij} \cdot d {}^oV = \int_{{}_oV} \{ {}^{t+\Delta t}\hat{S} \}^{(i)} \cdot \delta \{ {}^{t+\Delta t}\hat{\varepsilon} \}^{(i)} \cdot d {}^oV = {}^{t+\Delta t}R \quad (35)$$

En esta expresión,  ${}^{t+\Delta t}\hat{S}^{ij}$  y  $\{ {}^{t+\Delta t}\hat{S} \}^{(i)}$  representan al segundo tensor de Piola Kirchoff en notación tensorial y contraída,  ${}^{t+\Delta t}\hat{\varepsilon}^{ij}$  y  $\{ {}^{t+\Delta t}\hat{\varepsilon} \}^{(i)}$  representan al tensor de deformaciones de Green-Lagrange en notación tensorial y contraída y  ${}^{t+\Delta t}R$  es el trabajo virtual de las fuerzas exteriores sobre la configuración en  $t + \Delta t$ , en cada punto del volumen del elemento. En general, debido a que la estructura puede sufrir grandes desplazamientos y deformaciones, la ecuación de equilibrio (35) no podrá resolverse directamente y deberá ser linealizada. Planteando una aproximación de Taylor de primer orden y reordenando los términos de manera más conveniente, se tiene una formulación lineal de las ecuaciones incrementales de movimiento:

$$\int_{{}_oV} \{ \Delta \hat{S} \}^{(i)} \cdot \delta \{ \Delta \hat{\varepsilon} \}^{(i)} \cdot d {}^oV + \int_{{}_oV} \{ {}^t\hat{S} \}^{(i)} \cdot \delta \{ \Delta \hat{\eta} \}^{(i)} \cdot d {}^oV \approx {}^{t+\Delta t}R - \int_{{}_oV} \{ {}^t\hat{S} \}^{(i)} \cdot \delta \{ \Delta \hat{\varepsilon} \}^{(i)} \cdot d {}^oV \quad (36)$$

A partir de las funciones de forma obtenidas previamente, los términos de la expresión (36) podrán ser interpolados mediante de las variables nodales incrementales del elemento.

Reemplazando las expresiones incrementales del campo de tensiones y deformaciones, se obtiene la ecuación de equilibrio incremental linealizada, expresada a partir de una matriz de rigidez tangente.

$$\left[ {}^t \hat{\mathbf{K}} \right]_{rs} \cdot \{ \Delta \hat{\mathbf{U}} \}_s \approx \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} \}_r - \{ {}^t \hat{\mathbf{R}}_l \}_r \quad (37)$$

Luego de la aproximación de Taylor, las componentes de la matriz (simétrica) de rigidez tangente del elemento quedan definidas en (38) a partir de las integrales de volumen del elemento en la configuración inicial de referencia.

$$\left[ {}^t \hat{\mathbf{K}} \right]_{pq} \approx \int_{\circ V} \left[ {}^t \hat{\mathbf{B}}_L \right]_p^{(i)} \cdot \left[ {}^t \hat{\mathbf{C}} \right]^{(ij)} \cdot \left[ {}^t \hat{\mathbf{B}}_L \right]_q^{(j)} \cdot d^{\circ}V + \int_{\circ V} \{ {}^t \hat{\mathbf{S}} \}^{(i)} \cdot \left( \left[ {}^t \hat{\mathbf{B}}_{NL} \right]_{pq}^{(i)} + \left[ {}^t \hat{\mathbf{B}}_{NL} \right]_{qp}^{(i)} \right) \cdot d^{\circ}V \quad (38)$$

La integración del trabajo virtual del incremento de tensiones con la componente lineal de deformaciones, resulta en el vector de fuerzas internas, cuyas componentes quedan determinadas según la expresión (39)

$$\{ {}^t \hat{\mathbf{R}}_l \}_m \approx \int_{\circ V} \{ {}^t \hat{\mathbf{S}} \}^{(i)} \cdot \left[ {}^t \hat{\mathbf{B}}_L \right]_m^{(i)} \cdot d^{\circ}V \quad (39)$$

## 5 IMPLEMENTACION NUMÉRICA

La ecuación de equilibrio será resuelta en un esquema iterativo incremental, donde la última configuración conocida en  $t$  corresponderá a la primer iteración (0) de una configuración desconocida en  $t + \Delta t$ .

$$\langle 0 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{U}} \} = \{ {}^t \hat{\mathbf{U}} \} \quad \langle 0 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{S}} \} = \{ {}^t \hat{\mathbf{S}} \} \quad \langle 0 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \} = \{ {}^t \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \} \quad (40)$$

$$\langle k \rangle \{ \Delta \hat{\mathbf{U}} \} \approx \langle k-1 \rangle \left[ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{K}} \right]^{-1} \cdot \left( \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}} \} - \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{R}}_l \} \right) \quad (41)$$

$$\langle k \rangle \{ \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \} \approx \left( \left[ {}^t \hat{\mathbf{B}}_L \right] + \left[ {}^t \hat{\mathbf{B}}_{NL} \right]^T \cdot \langle k \rangle \{ \Delta \hat{\mathbf{U}} \} \right) \cdot \langle k \rangle \{ \Delta \hat{\mathbf{U}} \} \quad \langle k \rangle \{ \Delta \hat{\mathbf{S}} \} \approx \langle k-1 \rangle \left[ {}^t \hat{\mathbf{C}} \right] \cdot \langle k \rangle \{ \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \} \quad (42)$$

$$\langle k \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \} \approx \langle k-1 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \} + \langle k \rangle \{ \Delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \} \quad \langle k \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{S}} \} \approx \langle k-1 \rangle \{ {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{S}} \} + \langle k \rangle \{ \Delta \hat{\mathbf{S}} \} \quad (43)$$

Las ecuaciones deberán resolverse repetidamente para  $k = 1, 2, 3, \dots$  hasta cumplir cierto criterio de corte. Los criterios de convergencia basados en el control de la energía [3],[5] serán preferibles a los criterios basados en desbalance de fuerzas o desplazamientos.

### 5.1 Integración numérica

En una sección anisótropa formada por un conjunto de láminas ortótropas, las integrales definidas sobre el volumen elemental en las expresiones (38) y (39), podrán reemplazarse por una suma de integrales sobre el espesor de cada lámina. La expresión resultante de la integración numérica de la matriz tangente elemental queda determinada en forma general a partir de dos arreglos multidimensionales de integración,  ${}^{rsu}_n [\boldsymbol{\Omega}]_{pq}$  y  ${}^{rsu}_n [\boldsymbol{\Lambda}]_{pq}$  según (44):

$$\left[ {}^t \hat{K} \right]_{pq} \approx {}_n \omega \cdot \alpha^r \cdot \beta^s \cdot \gamma^u \cdot \left( {}^{rsu} [\Omega]_{pq} + {}^{rsu} [\Lambda]_{pq} \right) \quad (44)$$

En la expresión (44) se mantiene la convención de la suma para los índices  $(n, r, s, u)$  los cuales suman según  $n = 1 \dots NL - 1$ ,  $r = 1 \dots N_1$ ,  $s = 1 \dots N_2$  y  $u = 1 \dots N_3$ , siendo  $NL$  el número de láminas de la sección y  $N_1, N_2, N_3$  el número de puntos de integración para las dimensiones  $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  respectivamente. Los arreglos multidimensionales están asociados a la integración de las matrices de rigidez de desplazamientos iniciales y de tensiones iniciales, respectivamente. Los parámetros  $\alpha^r, \beta^s, \gamma^u$  son las funciones de peso para las integraciones en cada una de las tres dimensiones del volumen elemental. El parámetro  ${}_n \omega$  resulta del cambio de variable para el dominio de integración, definido luego en (49) a (51)

$${}^{rsu} [\Lambda]_{pq} \approx {}^{rsu} \left\{ {}^t \hat{S} \right\}^{(i)} \cdot \left( {}^{rsu} \left[ {}^t \hat{B}_{NL} \right]_{pq}^{(i)} + {}^{rsu} \left[ {}^t \hat{B}_{NL} \right]_{qp}^{(i)} \right) \quad (n, r, s, u \text{ no sum.}) \quad (45)$$

$${}^{rsu} [\Omega]_{pq} \approx {}^{rsu} \left[ {}^t \hat{B}_L \right]_p^{(i)} \cdot {}^{rsu} \left[ {}^t \hat{C} \right]^{(ij)} \cdot {}^{rsu} \left[ {}^t \hat{B}_L \right]_q^{(j)} \quad (n, r, s, u \text{ no sum.}) \quad (46)$$

Las matrices de interpolación evaluadas en los puntos de integración se determinan por única vez al comienzo del proceso incremental. Los puntos de integración resultan del esquema de integración adoptado, siendo necesario un único cambio de variable que permite unificar los límites de integración.

$${}^{rsu} \left[ {}^t \hat{B}_L \right]_q^{(i)} \approx \left[ {}^o \hat{B}_L \left( {}^o \hat{x}(\xi^r), {}^o \hat{y}(\psi^s), {}^o \hat{z}(\zeta_n^u) \right) \right]_q^{(i)} \quad (47)$$

$${}^{rsu} \left[ {}^t \hat{B}_{NL} \right]_{pq}^{(i)} \approx \left[ {}^o \hat{B}_{NL} \left( {}^o \hat{x}(\xi^r), {}^o \hat{y}(\psi^s), {}^o \hat{z}(\zeta_n^u) \right) \right]_{pq}^{(i)} \quad (48)$$

## 5.2 Esquemas de cuadratura y puntos de integración

La elección del número de puntos de integración de cada dimensión será crítica en el costo computacional de cada iteración de la matriz tangente y dependerá del tipo de problema a analizar. El índice  $r$  representa a la variable discreta de integración sobre la longitud del elemento según el cambio de variable dado por (49) y donde serán recomendables esquemas abiertos de Gauss con  $N_1 = 2$  o bien, esquemas cerrados de Gauss-Lobatto con  $N_1 = 4$ . El índice  $s$  representa a la variable discreta de integración en el ancho del elemento con el cambio de variable dado en (50). En este caso puede utilizarse un esquema cerrado de Newton-Cotes con  $N_2 = 3$  o bien, un esquema de Gauss-Lobatto, con  $N_2 = 4$ . El índice  $u$  representa a la variable discreta de integración sobre el espesor de la fibra. En este caso particular, un esquema de Gauss con  $N_3 = 1$  será suficiente para cada fibra. En los problemas de análisis de tensiones interlaminares, es computacionalmente más eficiente utilizar un esquema de Newton-Cotes con  $N_3 = 2$  y en los problemas de pocas láminas gruesas, será recomendable un esquema de Gauss con  $N_3 = 2$ .

$${}^o\hat{x}(\xi^r) = \frac{{}^oL}{2} \cdot (\xi^r + 1) \quad (r = 1 \dots N_1) \quad (49)$$

$${}^o\hat{y}(\psi^s) = \frac{b_o}{2} \cdot \psi^s \quad (s = 1 \dots N_2) \quad (50)$$

$${}^o\hat{z}(\xi_n^u) = \frac{{}_n h}{2} \cdot \xi_n^u + \frac{{}^o\hat{z}_{n+1} + {}^o\hat{z}_n}{2} \quad (u = 1 \dots N_3, \quad n = 1 \dots NL - 1) \quad (51)$$

En secciones tipo *sándwich*, formadas por un núcleo o lámina central con espesor mucho mayor a las láminas de refuerzo externas, es conveniente formular una integración de cuadratura de Gauss con  $N_2 > 2$  y  $N_3 > 2$  para el núcleo del laminado. En la expresión (51)  $b_o$  es el ancho de la viga y  ${}^o\hat{z}_{n+1}, {}^o\hat{z}_n$  son las coordenadas superior e inferior respectivamente y  ${}_n h$  el espesor de la lámina  $n$ -ésima, medidos en el sistema de coordenadas local del elemento.

### 5.3 Degradación de rigidez

En un proceso de cargas monotónico es posible considerar la degradación de la rigidez del elemento a partir de la falla sucesiva de cada lámina del laminado, mediante la incorporación de un criterio de fluencia y un indicador de falla, que deberán almacenarse para cada punto de integración, junto con el tensor constitutivo de la fibra, entendiéndose por fibra a un punto arbitrario de la lámina ortótropa seleccionado como punto de integración.

En este tipo de análisis, los tensores constitutivos deberán almacenarse para cada punto de integración al igual que los tensores de tensiones y deformaciones iniciales, que forman parte de la historia de cargas de la fibra y las matrices de integración se modifican según (52)

$${}^{rsu}[\Omega]_{pq} \approx {}_n^{rsu} \left[ {}^t\hat{B}_L \right]_p^{(i)} \cdot {}_n^{rsu} \left[ {}^t\hat{C} \right]^{(ij)} \cdot {}_n^{rsu} \left[ {}^t\hat{B}_L \right]_q^{(j)} \quad (n, r, s, u \text{ no sum.}) \quad (52)$$

Para la evaluación según un criterio de falla particular basado en invariantes de tensión, las tensiones y deformaciones en coordenadas materiales (principales) de cada lámina, podrán ser determinadas en su forma incremental a partir de las transformaciones inversas según (53).

$$\{\Delta\tilde{S}\}^{(k)} = [T_\varepsilon]^{(ki)} \cdot \{\Delta\hat{S}\}^{(i)} \quad \{\Delta\tilde{\varepsilon}\}^{(k)} = [T_\sigma]^{(ki)} \cdot \{\Delta\hat{\varepsilon}\}^{(i)} \quad (53)$$

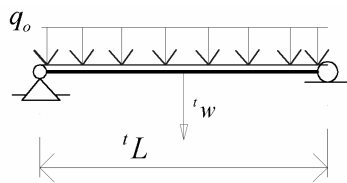
### 5.4 Implementación numérica

El modelo numérico formulado en el presente trabajo, fue implementado en un programa de elementos finitos para el análisis no lineal de estructuras de materiales compuestos [14] desarrollado en la cátedra de Mecánica de Laminados Compuestos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA). El programa, implementado sobre *Mathematica 3.1 (Student Version)*, admite la modelación de estructuras espaciales de barras, con la definición de secciones transversales (simétricas) arbitrarias compuestas de materiales ortótropos, en secuencias de laminación arbitrarias y con integración selectiva, entre otras facilidades.

## 6 RESULTADOS OBTENIDOS

En el presente capítulo se analizan algunos problemas de la bibliografía de referencia. Para evaluar la influencia real sobre el campo de desplazamientos del elemento, se analizan para cada problema dos soluciones: una solución en la que no se considera el acoplamiento entre torsión y corte, haciendo nulos los términos de alabeo dados en (8) y denominadas soluciones FSDT(\*) y una solución correspondiente al campo de desplazamientos modificado por el acoplamiento de torsión y corte, que se denominará en lo sucesivo según sus siglas en inglés, MSDT (*Modified Shear Deformation Theory*).

### 6.1 Problema 1. Viga laminada simplemente apoyada.



$$\begin{aligned}
 E_1/E_2 &= 25 \\
 G_{12} = G_{13} &= 0.5 \cdot E_2 \\
 G_{23} &= 0.2 \cdot E_2 \quad \nu_{12} = 0.25 \\
 L/h &= 10 \quad b = 1.5 \quad h = 0.1 \\
 q_0 &= 1.0
 \end{aligned}$$

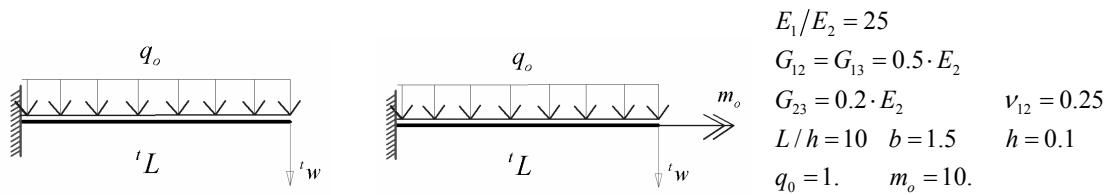
LAM. SEQ.	A. Referencia [11]				B. Presente formulación		
	CLPT		FSDT			FSDT(*)	MSDT
	mall	w	mall	w	mall	w	w
0	2	0.6234	2Q	0.9234	2	<b>0.8708</b>	<b>0.8708</b>
	4	0.6234	4Q	0.9234	4	<b>0.8708</b>	<b>0.8708</b>
					6	<b>0.8708</b>	<b>0.8708</b>
(0/90)	2	3.3216	2Q	3.7502	2	<b>3.1882</b>	<b>3.1882</b>
	4	3.3216	4Q	3.7502	4	<b>3.4957</b>	<b>3.4957</b>
					6	<b>3.5526</b>	<b>3.5526</b>
(45/-45)	2	5.3959	2Q	5.8245	2	<b>4.9917</b>	<b>4.9992</b>
	4	5.3959	4Q	5.8245	4	<b>5.4648</b>	<b>5.4642</b>
					6	<b>5.5503</b>	<b>5.5504</b>
(0/90)s	2	0.7084	2Q	1.1370	2	<b>1.0624</b>	<b>1.0624</b>
	4	0.7084	4Q	1.1370	4	<b>1.0624</b>	<b>1.0624</b>
					6	<b>1.0624</b>	<b>1.0624</b>
(45/-45)s	2	2.1879	2Q	2.6165	2	<b>2.5833</b>	<b>2.6165</b>
	4	2.1879	4Q	2.6165	4	<b>2.6156</b>	<b>2.6571</b>
					6	<b>2.6192</b>	<b>2.6632</b>

Tabla 1 Flecha central en una viga simplemente apoyada (Ochoa y Reddy [11])

En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos para la flecha central de una viga simplemente apoyada de longitud  $L$  con una carga uniformemente distribuida  $q_0$  y con una sección transversal laminada según diferentes secuencias de laminación. Se muestran los

resultados del presente modelo (FSDT\*/MSDT) junto a las soluciones obtenidas en la referencia [11]. En las columnas CLPT se muestran los resultados para una malla de elementos hermíticos de 2,4 y 6 elementos, sin considerar deformaciones por corte (Ref. [11]). En las columnas FSDT se muestran los resultados para una placa en flexión cilíndrica (strip) con mallas de 2 y 4 elementos lagrangianos (cuadráticos) considerando deformaciones por corte (Ref. [11]). En las columnas FSDT(\*) y MSDT, se muestran los resultados de la presente formulación, con mallas de 2,4 y 6 elementos. La solución convergió para la malla mínima. La ausencia de esfuerzos de torsión mostró que el acoplamiento de las distorsiones sobre los desplazamientos transversales es nulo en laminados cruzados y despreciable en laminados oblicuos (45/-45)

**6.2 Problema 2. Ménsula laminada.**



LAM. SQ.	(mo=0)			(mo=10 qo)		
		FSDT(*)	MSDT		FSDT(*)	MSDT
	mall	w	w	mall	w	w
(45/-45)s	1	22.452	22.762	1	-3.421	-12.409
	2	22.933	22.552	2	5.163	-4.864
	4	22.608	23.006	4	4.742	-4.191
(45/-45/45)s	1	22.414	22.505	1	-0.183	-2.314
	2	22.466	22.568	2	7.113	2.535
	4	22.503	22.599	4	6.629	3.034
(45/-45/45/-45)s	1	22.249	22.287	1	9.499	7.624
	2	22.273	22.317	2	13.624	10.515
	4	22.285	22.329	4	13.352	10.809
(45/-45/45/-45/45)s	1	22.268	22.289	1	8.660	8.174
	2	22.286	22.309	2	12.992	10.908
	4	22.300	22.319	4	12.730	11.191
(0/30/60/90)s	1	9.323	9.382	1	-4.446	-7.850
	2	9.334	9.401	2	0.480	-3.684
	4	9.349	9.416	4	-0.139	-3.516

Tabla 2 Flecha en el extremo de una ménsula (Ochoa y Reddy [11])

La Tabla 2 muestra la influencia de las deformaciones de torsión sobre la flecha extrema de una ménsula empotrada sometida a una carga uniforme distribuida y a un par torsor simultáneos, actuando en el extremo libre. Se comparan los resultados del modelo para un

problema de flexión y corte (A) y para un problema de flexión, corte y torsión combinadas (B). Ambos problemas se analizaron según una formulación FSDT\* (no se consideró el alabeo de las secciones) y según la formulación propuesta (MSDT), para la cual se observa la significativa influencia del acoplamiento sobre los desplazamientos verticales cuando existen solicitaciones de torsión en una sección no-circular.

## 7 CONCLUSIONES

- > Fue presentada la formulación de un elemento finito de viga de eje recto tridimensional, para el análisis no-lineal de secciones prismáticas anisótropas sometidas a esfuerzos de flexión, torsión y corte combinados. El elemento incorporó una formulación cinemática del campo de desplazamientos que permitió considerar la influencia de los esfuerzos de corte, torsión y flexión sobre los desplazamientos transversales, mediante una teoría modificada de deformaciones de corte (MSDT) y la consideración del alabeo de las secciones transversales.
- > La influencia de las tensiones y deformaciones iniciales sobre el campo de desplazamientos del elemento fue significativa. La consideración de una medida de deformación no-lineal fue determinante para una correcta formulación de la matriz de rigidez del elemento
- > Los resultados obtenidos para los problemas de flexión y corte sin torsión (Tabla 1), mostraron que la consideración del acoplamiento sobre los desplazamientos transversales fue muy baja para laminados simétricos oblicuos (+45/-45)s. En el caso de laminados cruzados (0/90), la influencia del acoplamiento fue nula. La formulación MSDT convergió a la teoría FSDT ante la ausencia de esfuerzos de torsión.
- > Los resultados obtenidos para problemas de flexión, corte y torsión combinados (Tabla 2) mostraron una significativa influencia del acoplamiento sobre los desplazamientos transversales. La utilización de una teoría FSDT (sin considerar el alabeo de las secciones) arrojó diferencias muy grandes en módulo y signo respecto de la formulación propuesta MSDT. Se obtuvieron diferencias de desplazamientos verticales muy grandes (300%) en los casos de laminados simétricos oblicuos del tipo (45/-45)s. El incremento del número de secuencias (45/-45) en este tipo de laminados (pseudoisotropía) redujo la influencia del alabeo sobre los desplazamientos verticales a diferencias reducidas (20%). El modelo propuesto convergió a la solución con un número igual o menor de elementos que los utilizados en modelos de placas bajo flexión cilíndrica. En todas las secuencias de laminación analizadas, la existencia de esfuerzos de torsión, requirió un mayor número de elementos para converger a la solución. Para las formas de secciones transversales analizadas, la utilización de dos términos para la función de alabeo fue suficiente para converger a la solución de la serie.
- > El análisis de problemas de muchas láminas demandó tiempos considerables de cálculo, incluso con mallas de pocos elementos. Es recomendable el diseño y la implementación de técnicas de optimización y paralelización de algoritmos para hacer posible el análisis de secciones y mallas más complicadas, en un tiempo de cálculo razonable.
- > La influencia del acoplamiento de flexión y torsión sobre la degradación de rigidez en la

falla secuencial de láminas debe ser investigada, particularmente en laminados oblicuos considerando tensiones y deformaciones iniciales por gradientes de humedad y temperatura.

## REFERENCIAS

- [1] Barbero, E., *Introduction To Composite Materials Design*. Taylor & Francis (1999)
- [2] Bathe, K. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall. New Jersey (1996)
- [3] Bathe, K. and Bolourchi, S. "Large Displacement analysis of three-dimensional beam structures." *Intl. Journal for Numerical Methods in Engineering*. Vol. **14**, 961-986, (1979).
- [4] Crisfield, M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, Vol. **I**, John Wiley & Sons, New York (1991).
- [5] Dvorkin E., Oñate E., and Oliver, J. "On a Non-Linear Formulation For Curved Timoshenko Beam Elements Considering Large Displacement/Rotation Increments". *Intl. Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **26**, 1597-1613 (1988)
- [6] Felippa C.A., "The Amusing History of Shear Flexible Elements." Center for Aerospace Structures. Univ. of Colorado. CU-CAS-05-1 (2005)
- [7] Ghugal, Y.M. and Shimpi, R.P. "A review of Refined Shear Deformation Theories for isotropic and anisotropic Laminated Beams." *Journal of Reinforced Plastics and Composites*. Vol.**20** 03 (2001)
- [8] Jones, R., *Mechanics of Composite Materials*. 2/E Taylor & Francis.(1999)
- [9] Lip H. "Spatial Rotation Kinematics and Flexural-Torsional buckling." *Dept. of Civil Engineering. University of Sydney*.(2006)
- [10] Mendonça, P.T. *Materiais Compostos & Estruturas-Sanduiche*. Ed. Manole. Brasil (2005)
- [11] Ochoa O. O. and Reddy J.N. "Finite Element Analysis of Composite Laminates." *SMIA*. Vol.7. Kluwer Academic Press (1992)
- [12] Petrov, E. and Geradin, M. Finite element theory for curved and twisted beams based on exact solutions for three-dimensional solids. Part I: Beam Concept and geometrically exact nonlinear formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* Vol. **165** 43-92 (1998)
- [13] Reddy J.N. *Mechanics of Laminated Composite Plates. Theory and Analysis*. CRC Press.(1997)
- [14] Verri K., A, "FEARCS/3D – Programa de elementos finitos para el análisis no-lineal de vigas 3D de materiales compuestos reforzados. Manual de Referencia.", Departamento de Estabilidad, FIUBA , Buenos Aires (Draft)
- [15] Vidal P., Polit O., "Un élément fini C1 pour l'analyse thermomécanique de poutres sandwich " *Laboratoire de Mécanique de Paris X (LMpX)*, (2005).